F 1503/4

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 1–2

SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1976

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITATEA TEHNICĂ "GHEORGHE ASACHI" DIN IAȘI

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 1—2

## SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1976

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. dr. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

IV. MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. FĂRCAȘ
Prof. dr. ing. G. D'ALBON
Conf. ing. CR. LINDE

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. doc. ing. ALFRED BRAIER (secretar de redacție)
Șef de lucrări ing. I. CONDREA (secretar de redacție adjunct)
Asist. ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XXII (XXVI), fasc. 1—2 1976

Secţia IV

## MECANICĂ TEHNICĂ

## SUMAR

Pag.

H. S. HEAPS (Canada), N. IRIMICIUC, K. V. LEUNG (Canada), D. MANGERON, Optimizarea staţionarităţii prin aproximare cu elemente finite în problema procesului de modelare a sistemelor enzimale (I) (engl., rez. rom.) . . . . . 7

C. HUIU, Unele aspecte grafice plan-axiale ale problemelor de determinări de distribuţii de viteze şi de acceleraţii în mişcarea spaţială a rigidului. (II) Distribuţia de acceleraţii (rom., rez. franc.). . . . . 13

I. NISTOR, Despre deformarea finită a mediului Cosserat (engl., rez. rom.) 19

VICTOR GHIZDAVU, Cercetări privind sudarea prin frecare a unor piese din metale de naturi diferite (rom., rez. franc.). . . . . 25

MIRCEA ZUGRĂVEL, CONDRAT-ADRIAN HOMUTESCU şi RADU GAIGINSCHI, Un nou tip de instalaţie pentru odorizarea gazelor naturale (rusă, rez. rom.) . . . . . 33

GH. CAŞLER, VITALIE BELOUS, MIRCEA COZMÎNCA, BORIS PLĂHTEANU, M. ROMANIŢĂ şi M. AELENEI, Cercetări asupra uzurii şi durabilităţii burghielor elicoidale (rom., rez. franc.) . . . . . 39

I. CONDREA şi GH. COMAN, Instalarea semifabricatelor de rulmenţi pentru strunjirea exterioară (rom., rez. franc.) . . . . . 45

AL. RENER, Elaborarea şi experimentarea unui stand pentru analiza comportării dinamice a maşinilor de găurit (germ., rez. rom.) . . . . . 51

GH. COMAN, Principii constructiv-funcţionale pentru unificarea echipamentului tehnologic al maşinilor de rectificat elemente de rulmenţi (rom., rez. engl.) . . . . . 57

GH. CAŞLER, şi D. ZETU, Contribuţii privind proiectarea subansamblului arbore principal al maşinilor-unelte avînd în vedere comportarea sa la solicitări statice (rom., rez. franc.) . . . . . 65

N. GOJINEŢCHI, N. GHERGHEL şi I. UDREA, Unele consideraţiuni privind influenţa unghiului conului şi a forţei axiale de strîngere asupra deformaţiilor pieselor poziţionate între vîrfuri fixe (rom., rez. franc.) 73

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1–2 1976

Section IV

## APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

Pp.

H. S. HEAPS (Canada), N. IRIMICIUC, K. V. LEUNG (Canada) and D. MANGERON, An Optimization Method using Piecewise Finite Element Approximation as Found to be used in Enzyme System Model Fitting Process (I) (English, Romanian summary) . . . . . 7

C. HUIU, Quelques aspects graphiques plan-axiels des problèmes des distributions des vitesses et des accélérations dans le mouvement général du rigide (II) (Romanian, French summary) . . . . . 13

I. NISTOR, On Finite Deformation of Elastic Cosserat Continuum (English, Romanian summary) . . . . . 19

VICTOR GHIZDAVU, Recherches concernant le soudage par friction des pièces de métaux ayant des natures différentes (Romanian, French summary) . . . . . 25

MIRCEA ZUGRĂVEL, CONDRAT-ADRIAN HOMUTESCU et RADU GAIGINSCHI, Un nouveau type d'installation pour l'odorisation des gaz naturels (Russian, Romanian summary) . . . . . 33

GH. CAŞLER, VITALIE BELOUS, MIRCEA COZMÎNCA, M. ROMANIŢĂ et M. AELENEI, Recherches sur l'usure et la durabilité des forêts hélicoïdaux (Romanian, French summary) . . . . . 39

I. CONDREA et GH. COMAN, L'ablocage des demi-produits de roulements pour le tournage extérieur (Romanian, French summary) . . . . . 45

AL. RENER, Auslegung und Prüfung einer Versuchsanlage für die Analyse des dynamischen Verhaltens der Bohrmaschinen (German, Romanian summary) . . . . . 51

GH. COMAN, The Constructiv-Functional Principles for the Unification of the Technological Equipment on the Grinding Machines of the Bearing Elements (Romanian, English summary) . . . . . 57

GH. CAŞLER et D. ZETU, Contributions concernant le calcul du sous-ensemble de la broche de machines-outils compte tenu de son comportement sous charges statiques (Romanian, French summary). . . . . 65

N. GOJINEŢCHI, N. GHERGHEL et I. UDREA, Quelques considérations concernant l'influence de l'angle du cone et de la force axiale de serrement sur les déformations des pièce positionés entre les pointes fixes du tour (Romanian, French summary) . . . . . 73

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XXII (XXVI), Вып. 1—2 1976

Секция IV

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Х.С. ХИПС (Канада), Н. ИРИМИЧЮК, К. В. ЛОИНГ (Канада) и Д. МАНДЖЕРОН, Оптимизация стационарности аппроксимированием конечными элементами задачи моделирования энзимальных процессов (I) (англ., рез. рум.) . . . . . 7

К. ХУЮ, Графические плоско-аксиальные аспекты в задачах о распределении скоростей и ускорений в пространственных движениях твердых тел (II) (рум., рез. франц.) . . . . . 13

И. НИСТОР, Конечные деформации эластичном тел типа Коссера (англ., рез. рум.) . . . . . 19

ВИКТОР ГИЗДАВУ, Исследование сварки трением нескольких деталей из различных металлов (рум., рез. франц.) . . . . . 25

МИРЧА ЗУГРЭВЕЛ, КОНДРАТ-АДРИАН ХОМУТЕСКУ и РАДУ ГАЙДЖИНСКИ, Новая модель установки для одорации естественных газов (русск., рез. рум.) . . . . . 33

Г. КАШЛЕР, ВИТАЛИЕ БЕЛОУС, МИРЧА КОЗМЫНКЭ, БОРИС ПЛЭХТИЯНУ, М. РОМАНИЦЭ и М. АЭЛЕНЕЙ, Исследования об износа и долговечности спиральных сверл (рум., рез. франц.) . . 39

И. КОНДРИА и Г. КОМАН, Установление подшипниковых полуфабрикатов (рум., рез. франц.) . . . . . 45

АЛ. РЕНЕР, Выработка и испытание стэнда для анализа динамического поведения сверлилных станков (герм., рез. рум.) . . . . . 51

Г. КОМАН, Конструктивно-функциональные принципы для унификация технологического оборудования шлифовальных станков для деталей подшипников качения (рум., рез. англ.) . . . . . 75

Г. КАШЛЕР и Д. ЗЕТУ, Вклады смотря проэктирование узлы главного шпинделя металлорежущих станков имея в виде своему поведению на статические загрузки (рум., рез. франц.) . . . . . 65

Н. ГОЖИНЕЦКИ, Н. ГЕРГЕЛ и И. УДРИЯ, Некоторые изображения о воздействием угола конуса и аксиальной силы зажимания против деформацией деталей прокладкие между фиксированых пиками (рум., рез. франц.) . . . . . 73

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621—52

# AN OPTIMIZATION METHOD USING PIECEWISE FINITE ELEMENT APPROXIMATION AS FOUND TO BE USED IN ENZYME SYSTEM MODEL FITTING PROCESS (I)[1])

BY

H. S. HEAPS, N. IRIMICIUC, K. V. LEUNG and D. MANGERON

1. The very recent self-contained developments of the *finite element analysis* from basic principles of the three cornerstone technologies (a) matrix structural analysis, (b) elastomechanics, and (c) variational principles [1], as well as the *finite element method* presented within the framework of a general taxonomy [2], gave an impulse to the authors' researches concerning various applications of the piecewise finite element approximation.

In what follows an optimization method using piecewise finite element approximation as found to be used in enzyme system model fitting process is developed, while the first and the third of the authors exposed during the very recent Bucharest International Conference on Cybernetics a new approach to establish enzyme system modelling [3].

**2.** Let $K(k_1, ..., k_m, ..., k_M)$ be the rectangular coordinates of a point $K$ in a $M$-dimensional space and $\varphi(K)$ be a scalar function of $K$. One proposes in the framework of the engineering mechanics problems on stationary positions find $\bar{K}(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_m, ..., \bar{k}_M)$ such that $\varphi(K)$ is stationary at $\bar{K}$.

*Method of solution.* Starting from an arbitrary chosen initial point $K^{(0)}(k_1^{(0)}, ..., k_m^{(0)}, ..., k_M^{(0)})$, an iterative process will be used to generate a sequence of points

$$\{K\} = \{K^{(0)}, K^{(1)}, ..., K^{(\nu-1)}, K^{(\nu)}, K^{(\nu+1)}, ...\} \tag{1}$$

that converges to $\bar{K}$,

$$\lim_{\nu \to \infty} K^{(\nu)} = \bar{K}. \tag{2}$$

*Iterative process to locate* $K^{(\nu+1)}$ *from* $K^{(\nu)}$.

*Step N°1.* Define a small subdomain $D_h$ of size $h$ that contains $K^{(0)}$ and select a set of $\frac{1}{2}(M+1)(M+2)$ points in $D_h$

[1]) Excerpt from the first part of the communication presented during the IV-th National Conference on Mechanics, Bucharest, 18—20 December 1975.

$$\{A\} = \{A_{00}, \ldots, A_{0M};\ A_{11}, \ldots, A_{1M};\ \ldots, A_{xy}, \ldots, A_{M-2,\,M-1},$$
$$A_{M-2,M};\ A_{M-1,M}\} = \{A_{xy} \mid x, y = 0,1, \ldots, M,\quad x \leqslant y\}. \tag{3}$$

$A_{xy}$ is termed as node in $D_h$.

*Step N°2.* Compute $\varphi(K)$ at $\{A\}$ and let

$$\varphi_{xy} = \varphi(A_{xy}) \tag{4}$$

with $x, y = 0, 1, \ldots, M$ and $x \leqslant y$, which is termed as nodal value of $\varphi(K)$ associated with node $A_{xy}$.

*Step N°3.* Approximate $\varphi(K)$ by a quadratic function $\tilde{\varphi}(K)$

$$\varphi(K) \simeq \tilde{\varphi}(K) = a_0 + \sum_{i=1}^{M} a_i k_i + \sum_i \sum_j a_{ij} k_i k_j, \tag{5}$$

with $i, j = 1, 2, \ldots, M$ and $i \leqslant j$, which will be set as a certain linear expression of nodal values $\varphi_{xy}$ of $\varphi(K)$

$$\tilde{\varphi}(K) \equiv \sum_x \sum_y H_{xy}(K) \varphi_{xy}, \tag{6}$$

with $x, y = 0, 1, \ldots, M$ and $x \leqslant y$, where $H_{xy}(K)$ are quadratic functions of $K$, so chosen such that

$$H_{xy}(A_{x'y'}) = \delta_{x,y;x',y'} = \begin{cases} 1, \text{ if } x = x' \text{ and } y = y' \\ 0, \text{ if otherwise,} \end{cases} \tag{7}$$

$H_{xy}(K)$ is termed as shape function associated with node $A_{xy}$, in other words $\varphi(K)$ and $\varphi(K)$ should the same numerical values at $\{A\}$.

Furthermore, by expanding $\varphi(K)$ and $\tilde{\varphi}(K)$ into Taylor's series from $K^{(\nu)}$ or from one of the nodes, domain $D_h$ and $\{A\}$ are so chosen such that

$$| \varphi(K) - \tilde{\varphi}(K) | \sim o(h^3), \quad \text{where} \quad k \in D_h. \tag{8}$$

*Step N°4.* Let $\tilde{K}(\tilde{k}_1, \ldots, \tilde{k}_m, \ldots, \tilde{k}_M)$ be the point where $\tilde{\varphi}(K)$ is stationary, in other words where the $M$ first partial derivatives are equal to zero,

$$\frac{\partial}{\partial k_m} \tilde{\varphi}(K) = a_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_{im} k_i + \sum_{j=m}^{M} a_{mj} k_j = 0, \tag{9}$$

with $m = 1, 2, \ldots, M$. Solve equations (9) for $\tilde{K}$ and put $K^{(\nu+1)} = \tilde{K}$.

*Step N°5.* If $\tilde{K}^{(\nu+1)} = K$ is outside $D_h$, repeat the same iterative process to obtain $K^{(\nu+2)}$. Otherwise if $K^{(\nu+1)} = \tilde{K}$ is in $D_h$, reduce the size $h$ of $D_h$ to $\frac{h}{2}$ and repeat the same iterative process to get $K^{(\nu+2)}$.

*Subdomain* $D_h$. Subdomain $D_h$ that is associated with $K^{(\nu)}(k_1^{(\nu)}, \ldots, k_m^{(\nu)}, \ldots, k_M^{(\nu)})$ is a $M$-dimensional rectangular tetrahedron $\Delta_h$ of center $K^{(\nu)}$ and sides $h$, which is a preassigned small positive number. Its $(M+1)$

corners are labelled as $A_{xx}$ with $x = 0, 1, ..., M$: $A_{00}(k_1^{(0,0)}, ..., k_m^{(0,0)}, ..., k_M^{(0,0)})$, $A_{11}(k_1^{(1,1)}, ..., k_m^{(1,1)}, ..., k_M^{(1,1)})$, ..., $A_{xx}(k_1^{(x,x)}, ..., k_m^{(x,x)}, ..., k_M^{(x,x)}, ..., A_{MM}(k_1^{(M,M)}, ..., ..., k_m^{(M,M)}, ..., k_M^{(M,M)})$, where

$$k_m^{(0,0)} = k_m^{(\nu)} - \frac{1}{M+1}h, \quad k_m^{(x,x)} = k_m^{(0,0)} + \delta_{mx}h, \tag{10}$$

with $m = 1, 2, ..., M$, $x > 0$, and

$$\delta_{mx} = \begin{cases} 0, & \text{if } m \neq x, \\ 1, & \text{if } m = x. \end{cases} \tag{11}$$

*Nodes in $D_h$.* There will be at total $\frac{1}{2}(M+1)(M+2)$ nodes $A_{xy}$, with

$$x, y = 1, 2, ..., m, ..., M, \tag{12}$$

with $(M+1)$ nodes located at the corners of the $M$-dimensional tetrahedron and $\frac{1}{2}M(M+1)$ nodes $A_{xy}$ with $x < y$ at the midpoints of sides $A_{xx}A_{yy}$. The corner node coordinates are given by equations (10) and (11) and that of the midpoint nodes by

$$k_m^{(x,y)} = \frac{1}{2}(k_m^{(x,x)} + k_m^{(y,y)}). \tag{13}$$

*Shape functions $H_{xy}(K)$ associated with nodes $A_{xy}$.*

Let

$$A^{(m,m)} = \det | 1\, k_1^{(x,x)} \ldots k_m^{(x,x)} \ldots k_M^{(x,x)} |, \; x = 0, 1, ..., M, \tag{14}$$

$$\Delta^{(x,m)} = \det | 1\, k_1^{(x,j)} \ldots k_m^{(x,j)} \ldots k_M^{(x,j)} |, \; j = 0, 1, ..., M, \tag{15}$$

$\Delta_y^{(m,m)}$ and $\Delta_y^{(x,m)}$ are the determinants derived respectively from $\Delta^{(m,m)}$ and $\Delta^{(x,m)}$ by substituting their $(x+1)^{\text{th}}$-row with row vector $\{1, k_1, k_2, ..., k_m, ..., k_M\}$.

The shape functions $H_{xy}(K)$ are defined as follows. 1) Shape functions associated with corner nodes $\Delta_{xx}$:

$$H_{xx}(K) = \frac{\Delta_x^{(m,m)}\Delta_x^{(x,m)}}{\Delta^{(m,m)}\Delta^{(x,m)}}. \tag{16}$$

2) Shape functions associated with midpoint nodes

$$H_{xy}(K) = 4\frac{\Delta_x^{(m,m)}\Delta_y^{(m,m)}}{\Delta^{(m,m)}\Delta^{(m,m)}}. \tag{17}$$

It is to note that shape functions (16) and (17) satisfy condition (7) and they are quadratic functions of $K$. It is also to note that by putting $\alpha_m = \frac{k_m - k_m^{(0,0)}}{k}$ with $m = 1, 2, ..., M$, and $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_M)$, shape functions (16) and (17) become respectively

(18) $H_{xx}(\alpha) = \alpha_x(2\alpha_x - 1)$ and (19) $\Delta_{xy}(\alpha) = 4\alpha_x\alpha_y$,

with $x = 0, 1, \ldots, M$ and $y = 1, 2, \ldots, M$, and $x < y$. Hence the quadratic approximating function $\tilde{\varphi}$ associated with point $K$ of $\{K\}$ is given as

$$(20) \qquad \tilde{\varphi}(\alpha(K)) = \sum_{x=0}^{M} \alpha_x(2\alpha_x - 1)\varphi_{xx} + \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=x+1}^{M} 4\alpha_x\alpha_y\varphi_{xy}.$$

*Generation of $K^{(\nu+1)}$ from $K^{(\nu)}$.*

Let

$$(21) \qquad \tilde{\varphi}^{(\nu)}\alpha((K)) = -\sum_{x=0}^{M} \varphi_{xx}\alpha_x + 2\sum_{x=0}^{M} \varphi_{xx}\alpha_x^2 + 4\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=x+1}^{M} \varphi_{xy}\alpha_x\alpha_y$$

be the quadratic interpolating function associated with $K^{(\nu)}$. $K^{(\nu)+1}$ will be the point where $\tilde{\varphi}^{(\nu)}(\alpha(K))$ is stationary. Hence its coordinates $K^{(\nu+1)}(\alpha(K))$ will be given by a system of $M$ linear equations

$$(22) \qquad h\frac{\partial}{\partial k_m}\tilde{\varphi}^{(\nu)}(\alpha(K)) = -\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\tilde{\gamma}^{(\nu)}(\alpha) + \frac{\partial}{\partial\alpha_m}\varphi^{(\nu)}(\alpha) = 0,$$

$$\tilde{\varphi}^{(\nu)}(\alpha(K)) = (2\alpha_0^2 - \alpha_0)\varphi_{00} + \sum_{x=1}^{M}(2\alpha_x^2 - \alpha_x)\varphi_{xx} + 4\alpha_0\{\sum_{y=1}^{M}\alpha_y\varphi_{0y}\} +$$

$$+ 4\sum_{x=1}^{M-1}\sum_{y=x+1}^{M}\alpha_x\alpha_y\varphi_{xy},\ h\frac{\partial}{\partial k_m}\tilde{\varphi}^{(\nu)}(\alpha(K)) = -(4\alpha_0 - 1)\varphi_{00} - 4\sum_{y=1}^{M}\alpha_y\alpha_{0y} +$$

$$+ (4\alpha_m - 1)\varphi_{mm} + 4\alpha_0\varphi_{0m} + 4\sum_{x=1}^{m-1}\alpha_x\varphi_{xm} + 4\sum_{y=m+1}^{M}\alpha_y\varphi_{my} = 0,$$

or

$$\sum_{x=0}^{m}(\varphi_{xm} - \varphi_{0m})\alpha_x + \sum_{y=m+1}^{M}(\varphi_{my} - \varphi_{0y})\alpha_y = \frac{1}{4}(\varphi_{mm} - \varphi_{00}).$$

Put $\varphi_{my} = \varphi_{ym}$ if $y > m$. Then $K^{(\nu+1)}$ will be the solution of the following linear system

$$(23) \qquad \sum_{x=0}^{M}(\varphi_{xm} - \varphi_{0m})\alpha_x = \frac{1}{4}(\varphi_{mm} - \varphi_{00}),\quad \sum_{x=0}^{M}\alpha_x = 1,$$

where $\varphi_{xm} = \varphi_{mx}$ if $x > m$ and $m = 1, 2, \ldots, M$.

In a next to appear Note the results established above will be used in Enzyme System Model Fitting Process.

*Received December 30, 1975*

*Concordia University, Montreal, Canada*
*and*
*Polytehnic Institute, Jassy*

## REFERENCES

1. Gallagher R. H., *Finite Element Analysis.* Prentice-Hall Engineering Mechanics Series, Englewood Cliffs, N. J., 1975, XIX + 420 p.
2. Norrie D. H., de Vries G., *The Finite Element Method.* Academic Press, New York and London, 1973, XIII + 322 p.
3. Heaps H. S., Irimiciuc N., Leung K. V., Mangeron D., *Metoda de optimizare folosind aproximarea prin elemente finite, aplicabilă în procesul de modelare a sistemelor enzimale.* A IV-a Conferinţă de Mecanică, Bucureşti, 18—20 decembrie 1975.
4. Chiriacescu T., Ioniţă N., Leung K. V., Mangeron D., *Trasarea curbelor de contur folosind metoda elementului finit.* A IV-a Conferinţă de Mecanică, Bucureşti, 18—20 decembrie 1975.

## OPTIMIZAREA STAŢIONARITĂŢII PRIN APROXIMAREA CU ELEMENTE FINITE ÎN PROBLEMA PROCESULUI DE MODELARE A SISTEMELOR ENZIMALE (I)

(Rezumat)

Autorii folosind metoda de aproximare prin elemente finite în problema optimizării staţionarităţii proceselor de modelare a sistemelor enzimale prezintă elaborarea treptelor succesive menite a conduce, după cum se va arăta într-o notă ulterioară, la rezolvarea problemei propuse cu aproximaţie dorită, firește, graţie programării corespunzătoare la MEC. Se menţionează că prezenta Notă face parte din lucrarea [3] prezentată la cea de a IV-a Conferinţă Naţională de Mecanică (Bucureşti, 18—20 dec. 1975), iar metoda de aproximare prin elemente finite a mai fost folosită în cadrul aceleiaşi Conferinţe în [4].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 518.4

# UNELE ASPECTE GRAFICE PLAN-AXIALE ALE PROBLEMELOR DE DETERMINĂRI DE DISTRIBUȚII DE VITEZE ȘI DE ACCELERAȚII ÎN MIȘCAREA SPAȚIALĂ A RIGIDULUI

## II. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

DE

C. HUIU

Așa cum s-a menționat în enunțul problemei generale, formulat în prima notă [10], se consideră cunoscute elementele care permit determinarea completă a accelerațiilor pentru trei din punctele rigidului în mișcarea spațială.

De asemenea se consideră cunoscute rezultatele din Nota I [10].

Folosind relațiile stabilite în lucrarea [1], rezultă că accelerațiile $\bar{a}_\sigma$ ale celor trei puncte menționate ale rigidului, $B_\sigma$, $(\sigma = 1, 2, 3)$, sînt legate între ele prin următorul sistem de trei relații scalare:

$$(1)\quad \begin{cases} (\bar{a}_\sigma - \bar{a}_1)(\bar{r}'_\sigma - \bar{r}'_1) = -(\bar{v}_\sigma - \bar{v}_1)^2, \quad (\sigma = 2, 3) \\ (\bar{a}_3 - \bar{a}_1)(\bar{r}'_2 - \bar{r}'_1) + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1)(\bar{r}'_3 - \bar{r}'_1) = -2(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1), \end{cases}$$

$\bar{r}'_\sigma$ fiind vectorii de poziție ai punctelor $B_\sigma$ în raport cu polul $Q$ invariabil legat de solid, pol care poate să nu coincidă cu niciunul din cele trei puncte date.

Relațiile precedente arată că dintre mărimile scalare care determină accelerațiile celor trei puncte, un număr de trei pot să nu fie cunoscute anticipat, ele urmînd a fi determinate prin rezolvarea sistemului (1); între aceste mărimi necunoscute figurează, de regulă, modulii accelerațiilor pentru două din punctele $B_\sigma$ ale solidului.

Transcriind sistemul (1) în coordonate plan-axiale, adică înlocuindu-l cu noul sistem de ecuații:

$$(2)\quad \begin{cases} (\bar{a}_{\sigma_\Pi} - \bar{a}_{1_\Pi})(\bar{r}'_{\sigma_\Pi} - \bar{r}'_{1_\Pi}) + (\bar{a}_{\sigma_\Delta} - \bar{a}_{1_\Delta})(\bar{r}'_{\sigma_\Delta} - \bar{r}'_{1_\Delta}) = -[(\bar{v}_{\sigma_\Pi} - \bar{v}_{1_\Pi})^2 + (\bar{v}_{\sigma_\Delta} - \bar{v}_{1_\Delta})^2] \\ \qquad\qquad (\sigma = 2, 3) \\ (\bar{a}_{3_\Pi} - \bar{a}_{1_\Pi})(\bar{r}'_{2_\Pi} - \bar{r}'_{1_\Pi}) + (\bar{a}_{3_\Delta} - \bar{a}_{1_\Delta})(\bar{r}'_{2_\Delta} - \bar{r}'_{1_\Delta}) + (\bar{a}_{2_\Pi} - \bar{a}_{1_\Pi})(\bar{r}'_{3_\Pi} - \bar{r}'_{1_\Pi}) + \\ + (\bar{a}_{2_\Delta} - \bar{a}_{1_\Delta})(\bar{r}'_{3_\Delta} - \bar{r}'_{1_\Delta}) = -2[(\bar{v}_{2_\Pi} - \bar{v}_{1_\Pi})(\bar{v}_{3_\Pi} - \bar{v}_{1_\Pi}) + (\bar{v}_{2_\Delta} - \bar{v}_{1_\Delta})(\bar{v}_{3_\Delta} - \bar{v}_{1_\Delta})] \end{cases}$$

și asociindu-i acestuia și relațiile evidente:

$$(3) \qquad |\bar{a}_{\sigma_\Delta}| = |\bar{a}_{\sigma_\Pi}| \operatorname{tg} \psi^a_\sigma , \quad (\sigma = 1, 2, 3),$$

$\psi^a_\sigma$ fiind unghiurile formate de accelerațiile $\bar{a}_\sigma$ cu planul reprezentării, va rezulta un sistem final de ecuații care vor permite determinarea componentelor plan-axiale ale tuturor celor trei accelerații $\bar{a}_\sigma$, putîndu-se scrie deci:

$$(4) \qquad \bar{a}_\sigma = \bar{a}_{\sigma_\Pi} + \bar{a}_{\sigma_\Delta} , \quad (\sigma = 1, 2, 3).$$

Pe de altă parte însă aceste accelerații vor fi date de relațiile:

$$(5) \qquad \bar{a}_\sigma = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon}\times\bar{r}'_\sigma + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}'_\sigma) = \bar{a}_Q + \bar{a}_{\mathrm{rot}_\sigma} + \bar{a}_{\mathrm{ax}_\sigma}, \quad (\sigma = 1, 2, 3),$$

în care vectorii $\bar{a}_Q$ și $\bar{\varepsilon}$, — parametrii cinematici de ordinul doi ai mișcării generale a rigidului —, nu sînt cunoscuți.

Introducînd din nou vectorii de poziție $\bar{r}'_{\sigma_0}$ ai punctelor $B^0_\sigma$ de intersecție a planului $\Pi_Q$, — paralel cu planul reprezentării și conținînd polul $Q$ —, cu paralelele duse prin punctele $B_\sigma$ la suportul vectorului $\bar{\omega}$, — vectori cunoscuți de acum din Nota I — vor putea fi scrise următoarele expresii pentru accelerațiile axipete:

$$\bar{a}_{\mathrm{ax}_\sigma} = \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}'_\sigma) = \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}'_{\sigma_0}) =$$

$$(6) \qquad = [(\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_{\sigma_0})\bar{\omega}_\Pi - \bar{\omega}^2\bar{r}'_{\sigma_0}] + (\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_\sigma)\bar{\omega}_\Delta , \quad (\sigma = 1, 2, 3).$$

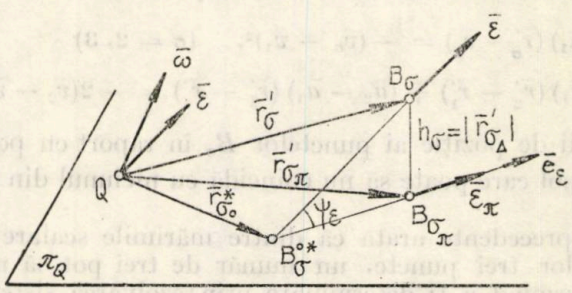



Fig. 1

De asemenea, dacă se notează cu $\bar{r}^*_{\sigma_0}$ vectorii de poziție față de polul $Q$ ai punctelor $B^{0*}_\sigma$ de intersecție a planului $\Pi_Q$ cu paralelele duse prin punctele $B_\sigma$ la suportul vectorului $\bar{\varepsilon}$, (fig. 1), acești vectori de poziție fiind deocamdată necunoscuți, atunci pot fi scrise și pentru accelerațiile de rotație, expresiile

$$(7) \qquad \bar{a}_{\mathrm{rot}_\sigma} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r}'_{\sigma_0} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r}^*_{\sigma_0} = \bar{\varepsilon}_\Delta\times\bar{r}^*_{\sigma_0} + \bar{\varepsilon}_\Pi\times\bar{r}^*_{\sigma_0}, \quad (\sigma = 1, 2, 3).$$

În baza relaţiilor (6) şi (7) pot fi scrise acum următoarele expresii pentru acceleraţiile $\bar{a}_\sigma$ :

$$\bar{a}_\sigma = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon}\times\bar{r}^*_{\sigma_0} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}'_{\sigma_0}), \quad (\sigma = 1, 2, 3) \tag{8}$$

acestor expresii corespunzîndu-le componentele plan-axiale :

$$\bar{a}_{\sigma\Pi} = \bar{a}_{Q\Pi} + \bar{\varepsilon}_\Delta\times\bar{r}^*_{\sigma_0} + (\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_{\sigma_0})\,\bar{\omega}_\Pi - \bar{\omega}^2\bar{r}'_{\sigma_0}, \quad (\sigma = 1, 2, 3) \tag{9}$$

şi

$$\bar{a}_{\sigma_\Delta} = \bar{a}_{Q_\Delta} + \bar{\varepsilon}_\Pi\times\bar{r}^*_{\sigma_0} + (\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_{\sigma_0})\bar{\omega}_\Delta, \quad (\sigma = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Pentru vectorii de poziţie $\bar{r}^*_{\sigma_0}$ pot fi scrise, aşa cum se vede în fig. 1, relaţiile :

$$\bar{r}^*_{\sigma_0} = \bar{r}'_{\sigma\Pi} - h_\sigma \operatorname{cotg}\psi_\varepsilon\,\bar{e}_\varepsilon = \bar{r}'_{\sigma\Pi} - h_\sigma\frac{\bar{\varepsilon}_\Pi}{|\bar{\varepsilon}_\Delta|}, \tag{11}$$

$\bar{\varepsilon}_\Pi = |\bar{\varepsilon}_\Pi|\,\bar{e}_\varepsilon$ şi $\bar{\varepsilon}_\Delta$ fiind componentele plan-axiale ale vectorului $\bar{\varepsilon}$, iar $\psi_\varepsilon$ unghiul format de acest vector cu planul reprezentării.

Scăzînd prima dintre relaţiile (9) din celelalte două, se obţin egalităţile :

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\sigma\Pi} - \bar{a}_{1\Pi} = \bar{\varepsilon}_\Delta\times(\bar{r}^*_{\sigma_0} - \bar{r}^*_{10}) + [(\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_{\sigma_0}) - (\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_{10})]\bar{\omega}_\Pi - \\ - \bar{\omega}^2(\bar{r}'_{\sigma_0} - \bar{r}'_{10}), \quad (\sigma = 2, 3),\end{aligned} \tag{12}$$

care, prin înmulţire, scalar, cu diferenţele geometrice $\bar{r}^*_{\sigma_0} - \bar{r}^*_{10}$ conduc la egalităţile :

$$\begin{aligned}(\bar{a}_{\sigma\Pi} - \bar{a}_{1\Pi})(\bar{r}^*_{\sigma_0} - \bar{r}^*_{10}) = \{[(\bar{\omega}_\Pi\bar{r}'_{\sigma_0}) - (\bar{\omega}_\Pi\bar{r}'_{10})]\bar{\omega}_\Pi - \bar{\omega}^2(\bar{r}'_{\sigma_0} - \bar{r}'_{10})\}(\bar{r}^*_{\sigma_0} - \bar{r}^*_{10}), \\ (\sigma = 2, 3).\end{aligned} \tag{13}$$

De asemenea, scăzînd prima dintre relaţiile (10) din celelalte două şi înlocuind diferenţele $\bar{r}^*_{\sigma_0} - \bar{r}^*_{10}$ cu expresiile :

$$\bar{r}^*_{\sigma_0} - \bar{r}^*_{10} = (\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi}) - (h_\sigma - h_1)\frac{\bar{\varepsilon}_\Pi}{|\varepsilon_\Delta|}, \tag{14}$$

care rezultă în baza relaţiilor (11), se obţin şi egalităţile :

$$\bar{a}_{\sigma_\Delta} - \bar{a}_{1_\Delta} = \bar{\varepsilon}_\Pi\times(\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi}) + [(\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_{\sigma_0}) - (\bar{\omega}_\Pi\,\bar{r}'_{10})]\bar{\omega}_\Delta, \quad (\sigma = 2, 3). \tag{15}$$

Prin înmulţirea, vectorial la stînga, a ultimelor relaţii cu diferenţele geometrice $\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi}$ corespunzătoare, prin descompunerea produselor dublu vectoriale obţinute prin aceste multiplicări, se obţin, după împărţirea prin $(\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi})^2$ şi introducerea notaţiilor :

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\Pi}(\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi})}{(\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi})^2} = \mu_\sigma , \quad (\sigma = 2, 3), \tag{16}$$

$\mu_\sigma$ fiind scalari nedeterminați, ecuațiile:

$$\bar{\varepsilon}_{\Pi} = \frac{(\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi}) \times (\bar{a}_{\sigma\Delta} - \bar{a}_{1\Delta})}{(\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi})^2} - \frac{(\bar{\omega}_{\Pi}\, \bar{r}'_{\sigma_0}) - (\bar{\omega}_{\Pi}\, \bar{r}'_{10})}{(\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{10})^2} (\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi}) \times \bar{\omega}_{\Delta} + \tag{17}$$

$$+ \mu_\sigma (\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi}), \quad (\sigma = 2, 3),$$

care vor permite să se determine componenta plană a vectorului accelerație unghiulară instantanee prin intersectarea a două drepte, loc geometric al extremităților vectorului $\bar{\varepsilon}_{\Pi}$.

Revenind la ecuațiile (13), se vor înmulți, vectorial la stînga, cu versorul $\bar{u}$ al axei reprezentării, obținîndu-se astfel după descompunerea produselor dublu vectoriale, egalitățile:

$$\bar{u} \times (\bar{a}_{\sigma\Pi} - \bar{a}_{1\Pi}) - [(\bar{\omega}_{\Pi} - \bar{r}'_{\sigma_0}) - (\bar{\omega}_{\Pi}\, \bar{r}'_{10})]\, \bar{u} \times \bar{\omega}_{\Pi} + \omega^2 \bar{u} \times (\bar{r}'_{\sigma_0} - \bar{r}'_{10}) =$$

$$= - \varepsilon_{\Delta} (\bar{r}^*_{\sigma_0} - \bar{r}^*_{10}), \quad (\sigma = 2, 3),$$

sau încă, ținînd seama și de relațiile (14), mai rezultă:

$$\bar{u} \times (\bar{a}_{\sigma\Pi} - \bar{a}_{1\Pi}) - [(\bar{\omega}_{\Pi} - \bar{r}'_{\sigma_0}) - (\bar{\omega}_{\Pi}\, \bar{r}'_{1_0})]\, \bar{u} \times \bar{\omega}_{\Pi} + \omega^2 \bar{u} \times (\bar{r}'_{\sigma_0} - \bar{r}'_{10}) =$$

$$= - \varepsilon_{\Delta} (\bar{r}'_{\sigma\Pi} - \bar{r}'_{1\Pi}) + (h_\sigma - h_1) \bar{\varepsilon}_{\Pi} , \quad (\sigma = 2, 3). \tag{18}$$

Oricare din ultimele două relații vor permite să se determine, folosind numai procedeele grafice prezentate în lucrarea [3], și mărimea $\varepsilon_{\Delta}$.

Cea de-a doua relație, rămasă neutilizată, dintre ecuațiile (18), împreună cu ecuațiile (11), vor putea fi folosite, în continuare, pentru determinarea vectorilor $\bar{r}^*_{\sigma_0}$, iar oricare dintre relațiile (9) și (10) vor furniza, în fine, și componentele plan-axiale ale accelerației de translație:

$$\begin{cases} \bar{a}_{Q\Pi} = \bar{a}_{\sigma\Pi} - \bar{\varepsilon}_{\Delta} \times \bar{r}^*_{\sigma_0} - (\bar{\omega}_{\Pi}\, \bar{r}'_{\sigma_0})\, \bar{\omega}_{\Pi} + \omega^2\, \bar{r}'_{\sigma_0} , \\ \bar{a}_{Q\Delta} = \bar{a}_{\sigma\Delta} - \bar{\varepsilon}_{\Pi} \times \bar{r}^*_{\sigma_0} - (\bar{\omega}_{\Pi}\, \bar{r}'_{\sigma_0}) \bar{\omega}_{\Delta} . \end{cases} \tag{19}$$

*Primită la 5 ianuarie 1976*

*Institutul politehnic, Iași,*
*Catedra de geometrie descriptivă și desen*

BIBLIOGRAFIE

1. Braier A., Antoniu M., *Asupra unui aspect al distribuției vitezelor și accelerațiilor în mișcarea solidului.* Bul. Inst. polit. Iași, II (VI), *3—4* (1956).
2. Federhofer K., *Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems.* Julius Springer, Wien, 1928.

3. Huiu C., Irimiciuc N., Ibănescu I., *Quelques applications de la géométrie représentative plane-axielle dans la présentation graphique de l'algèbre vectorielle.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVI (XX), *3—4*, s. I (1970).
4. Huiu C., Irimiciuc N., Neagu G., *Une nouvelle présentation graphique de la théorie des vecteurs glissants.* (I) *Caractéristiques plane-axielles d'un système de vecteurs glissants.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *1—2*, s. I (1971).
5. Huiu C., Neagu G., Irimiciuc N., *Une nouvelle présentation graphique de la théorie des vecteurs glissants.* (II) *Réduction des vecteurs glissants.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *3—4*, s. I (1971).
6. Huiu C., Rusu E., Irimiciuc N., *Quelques applications de la géométrie représentative plane-axielle dans la cinématique graphique spacielle.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVIII (XXII), *1—2*, s. I (1972).
7. Huiu C., Rusu E., Irimiciuc N., *La méthode des coordonnées vectorielles plane-axièlles dans la déterminations des vitesses dans le mouvement général du solid rigide.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVIII (XXII), *3—4*, s. I (1972).
8. Huiu C., Irimiciuc N., Rusu E., Stancu M., *Distribution des accélérations déterminées par la méthode des coordonnées vectorielles plane-axielles.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIX (XXIII), *3—4*, s. I (1973).
9. Huiu C., Buţurcă E., Tacu T., Luis V., *Aplicaţii ale metodei coordonatelor vectoriale plan-axiale în cinetostatica solidului cu puncte ghidate.* (I). *Determinarea parametrilor cinematici de ordinul întîi ai mişcării solidului.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XX (XXIV), *3—4*, s. I (1974).
10. Huiu C., *Unele aspecte grafice plan-axiale ale problemelor de determinări de distribuţii de viteze şi de acceleraţii în mişcarea spaţială a rigidului.* (I). *Distribuţia de viteze.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XXI (XXV), *1—2*, s. I (1975).
11. Irimiciuc N., Kleper I., *Aplicarea metodei grafice a coordonatelor vectoriale cilindrice în teoria mecanismelor şi maşinilor.* Bul. Inst. polit. Iaşi, III (VII), *3—4* (1957).
12. Irimiciuc N., *Asupra unor aspecte grafice ale distribuţiilor vitezelor şi acceleraţiilor punctelor unui solid în mişcare generală.* Bul. Inst. polit. Iaşi, IV (VIII), *1—2* (1958).

## QUELQUES ASPECTS GRAPHIQUES PLAN-AXIELS DES PROBLÈMES DES DISTRIBUTIONS DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS DANS LE MOUVEMENT GÉNÉRAL DU RIGIDE

### II. Distribution des accélérations

(Résumé)

Cette seconde Note présents les fondements theoriques des procédés graphiques de la méthode des coordonnées vectorielles plane-axielles, utilisés pour déterminer les paramètres cinématiques de deuxième ordre, $\bar{a}$ et $\bar{\varepsilon}$, lorsqu'on connaît tous les éléments qui caractérisent les vitesses et les accélérations en trois des points du rigide.

La solution du problème est fournie par les relations (17), (18) et (19).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 539.3

# ON FINITE DEFORMATION OF ELASTIC COSSERAT CONTINUUM

BY

I. NISTOR

## 1. Introduction

The strain tensors of the nonlinear theory of an elastic Cosserat medium are represented by means of the displacement and microrotation vectors. Using Stoppelli's method we prove a theorem of existence and uniqueness for the finite deformation of medium, when magnitudes of the external loads are proportional to the real parameter.

Let $C$ be a reference configuration of a Cosserat medium and $\Sigma$ the boundary of $C$. We refer the motion of continuum medium to a fixed rectangular Cartesian coordinate system, its origin $O$ belonging to $C$, and denotes by $x_k$, $y_k$ the material and spatial coordinates, respectively. Without loss of generality we may assume that the directors in the reference configuration are parallel to the base vectors for the coordinate system.

The motion of a continuum is represented by

$$y_i = y_i(x_j, t), \qquad R_{ik} = R_{ik}(x_j, t), \tag{1.1}$$

where $R_{ik}$ are the components of a proper orthogonal tensor $R$ which determine the position of the directors at time $t$. The tensor $R$ is called the microrotation tensor.

We denote by $S'$ and $S^{-1}$ the transpose and the inverse of the tensor $S$ and by $I$ the unit tensor.

The microrotation tensor must satisfy the relation

$$RR' = I. \tag{1.2}$$

If we denote by

$$S = R + I, \tag{1.3}$$

the relation (1.2) becomes

$$SS' - S' - S = 0. \tag{1.4}$$

Assuming that there exists $S^{-1}$ and taking into account that

$$(S^{-1})' = (S')^{-1}$$

from (1.4) we obtain

$$(S^{-1})' + S^{-1} = I. \tag{1.5}$$

If we take the components of the matrix $S^{-1}$ of the form

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} + \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\varphi_k \tag{1.6}$$

then, the relation (1.5) is identically satisfied and the components of the microrotation tensor become

$$R_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\varphi_k\varphi_k}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\varphi_k\varphi_k\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}\varphi_i\varphi_j + \varepsilon_{jik}\varphi_k\right]. \tag{1.7}$$

The vector $\varphi$ of the components $\varphi_k$ $(k = 1, 2, 3)$ is called the microrotation vector.

We consider as strain tensors [1]

$$c_{ij} = y_{k,i}R_{kj} - \delta_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jmn}R_{km,i}R_{kn}. \tag{1.8}$$

Taking into account (1.7) we obtain

$$\gamma_{ij} = \frac{2\varphi_{j,i} - \varepsilon_{jkp}\varphi_k\varphi_{p,i}}{2\left(1 + \frac{1}{4}\varphi_k\varphi_k\right)}. \tag{1.9}$$

If the point of the elastic Cosserat medium suffer infinitesimal displacements and the director triads suffer infinitesimal rotations, the strain tensors become

$$c_{ij} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijp}\varphi_p, \quad \gamma_{ij} = \varphi_{j,i}. \tag{1.10}$$

We take the external forces and couples of the form $\theta F$, $\theta f$, $\theta G$, $\theta g$, where $\theta$ is a real parameter. The basic equations in the static theory of a homogeneous and isotropic elastic Cosserat solid are [1]:

$$\begin{aligned}
&(R_{ij}t_{kj})_{,k} + \rho\theta F_i = 0,\\
&(R_{ij}m_{kj})_{,k} + \varepsilon_{ijk}y_{j,p}R_{kq}t_{pq} + \rho\theta G_i = 0,\\
&R_{ij}t_{kj}n_k = \theta f_i, \quad R_{ij}m_{kj}n_k = \theta g_i,\\
&t_k = \frac{\partial}{\partial c_{kj}}W(c_{ij}, \gamma_{pq}), \quad m_{kj} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{kj}}W(c_{ij}, \gamma_{pq}).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

In these relations we have used the following notations: $t_{ij}$ — components of stress tensor; $m_{ij}$ — components of couple stress tensor; $F_i$, $G_i$ — components of body force vector $F$ and body couple vector $G$ respectively; $\rho$ — the density of body in $C$; $f_i$, $g_i$ — components of surface force vector $f$ and surface couple vector $g$ respectively, per unit area of $\Sigma$; $W$ — strain energy per unit volume in $C$; $n_i$ — components of the unit

outward normal to $\Sigma$; $R_{ij}$ — components of microrotation tensor given by (1.7); $c_{ij}$, $\gamma_{ij}$ — components of strain tensors defined by (1.8); $u_i$, $\varphi_i$ — components of displacement vector $u$ and microrotation vector $\varphi$ respectively, and „$,_k$" denotes partial derivation with respect to the variable $x_k$.

We shall prove that the system (1.11) has a unique solution which satisfies the conditions

$$u(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0. \tag{1.12}$$

## 2. Fundamental Hypotheses and Spaces of Functions

We assume that:

1) $C$ is a configuration of natural equilibrium and the region occupied by the body is compact;

2) the boundary $\Sigma$ has Hölder-continuous principal curvatures with exponent $\lambda$ and it is possible to cover $\Sigma$ by a finite number of regions $\Sigma^p$, each of which can be represented parametricaly on a disc $C^p$, and every point of $\Sigma$ being interior to at least one $\Sigma^p$.

Let $u = (u_1\, u_2, u_3)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ be vector-valued functions defined on $C$. We denote by $Z$ the set of elements $z = (u, \varphi)$ which have Hölder-continuous second order derivatives with exponent $\lambda$ and satisfy the condition

$$z(0) = 0.$$

We consider

$$\|z\| = \sum_{i=1}^{6}\left[\max_{x\in C} |\, z_i\,| + \sum_{j=1}^{3} \max_{x\in C} |\, z_{i,j}\,| + \sum_{j,k=1}^{3} (\max_{x\in C} |\, z_{i,jk}\,| + B_{ijk})\right], \tag{2.1}$$

where $B_{ijk}$ are the Hölder-coefficients of $z_{i,jk}$. With (2.1) as norm $Z$ becomes a Banach space.

We denote by $Z'$ the class of elements

$$z' = (\Phi, \Psi, \varphi, \psi)$$

with the following properties:

a) $\Phi$ and $\Psi$ are vector-valued functions defined on $C$ and are Hölder-continuous with exponent $\lambda$;

b) $\varphi$ and $\psi$ are vector-valued functions defined on $\Sigma$; $\varphi$, $\psi$ and their first order derivatives with respect to the parameters of some parametric representation of $\Sigma$ (as in No 2) are Hölder-continuous with exponent $\lambda$;

c) these functions satisfy the equalities

$$\int_C \Phi dv + \int_\Sigma \varphi ds = 0, \qquad \int_C (p\times\Phi + \Psi)dv + \int_\Sigma (p\times\varphi + \psi)ds = 0. \tag{2.2}$$

We set

$$\| z' \| = \sum_{i=1}^{3} (\max_{x \in C} | \Phi_i | + \max_{x \in C} | \Psi_i | + \max_{x \in \Sigma} | \varphi_i | + \max_{x \in \Sigma} | \psi_i | + B_i + C_i + D_i + E_i), \tag{2.3}$$

where $B_i$, $C_i$ are the Hölder-coefficients of $\Phi_i$, $\Psi_i$ and $D_i$, $E_i$ are defined as in [2]. It can be verified that $Z'$ with (2.3) as norm is a Banach space.

We also suppose that:

3) the vector $z_0' = (\rho F, \rho G, f, g)$ satisfies the hypotheses a), b), c) and the strain energy function is continuous together with its derivatives up to the fourth order with respect to $u_{i,j}$, $\varphi_i$, $\varphi_{i,j}$ when they vary within the sphere of the 21-dimensional Euclidian space, having its center in the origin and radius $R$.

It follows that the strain energy function together with its derivatives up to the fourth order are continuous in the ball $\| z \| \leqslant R$ of the space $Z$.

## 3. Existence Theorem

Let $Q = (Q_{ij})$ be a rigid rotation independent of the material coordinates. We have

Theorem 3.1. *The functions* $y_i(x)$, $R_{ij}(x)$ *are a solution of problem* (1.11) *if and only if* $\bar{y}_i(x)$, $\bar{R}_{ij}(x)$ *defined by*

$$\bar{y}_i = Q_{ij} y_k , \qquad \bar{R}_{ij} = Q_{ik} R_{kj} , \tag{3.1}$$

*are a solution of the system*

$$\begin{aligned} &(\bar{R}_{nj} t_{kj})_{,k} + \rho\theta Q_{ni} F_i = 0, \\ &(\bar{R}_{nj} m_{kj})_{,k} + \varepsilon_{njk} \bar{y}_{j,p} \bar{R}_{kq} t_{pq} + \rho\theta Q_{ni} G_i = 0, \\ &\bar{R}_{pj} t_{kj} n_k = \theta Q_{pi} f_i, \qquad \bar{R}_{pj} m_{kj} n_k = \theta Q_{pi} g_i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Proof. The functions $t_{ij}$, $m_{ij}$ are invariant under all transformation (3.1). If $y_i$ and $R_{ij}$ are the solution of problem (1.11) then multiplying both sides of relations (1.11) by $Q_{pi}$ and making use of identity

$$\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{rij} Q_{kr} Q_{pi} Q_{qj} \tag{3.3}$$

one obtains that $\bar{y}_i$, $\bar{R}_{ij}$ are a solution of the system (3.2). If $\bar{y}_i$, $\bar{R}_{ij}$ are a solution of the system (3.2), then multiplying both sides of the relations (3.2) by $Q_{kp}$ and making use of the identity (3.3), we obtain that $y_i$, $R_{ij}$ are a solution of the problem (1.11).

In what follows we write $y_i$, $R_{ij}$ instead of $\bar{y}_i$, $\bar{R}_{ij}$ and consider

$$
\begin{aligned}
&(R_{ij}t_{kj})_{,k} + \rho\theta Q_{ij}F_j = \Phi_i\,,\\
&(R_{ip}m_{kp})_{,k} + \varepsilon_{ijk}y_{j,p}R_{kq}t_{pq} + \rho\theta Q_{ij}G_j = \Psi_i\,,\\
&-R_{ij}t_{kj}n_k + \theta Q_{ij}f_j = \varphi_i,\\
&-R_{ij}m_{kj}n_k + \theta Q_{ij}g_j = \psi_i\,.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

We shall determine the rigid rotation $Q$ in such a way that the right-hand side of the relations (3.4) be an element of the space $Z'$.

The hypotheses a), b) are obvious. It is easily shown that the relation $(2.2)_1$ is satisfied. The condition $(2.2)_2$ may be written as

$$
\begin{aligned}
&\theta\varepsilon_{ijk}Q_{jp}\left(\int_C \rho x_i F_p\,dv + \int_\Sigma x_i f_p\,ds\right) + \theta Q_{kp}\left(\int_C \rho G_p\,dv + \int_\Sigma g_p\,ds\right) =\\
&\qquad = \int_C \left(\varepsilon_{kij}R_{jp}t_{ip} - \varepsilon_{kin}y_{i,j}R_{np}t_{jp}\right)dv.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Taking into account that

$$
\int_C \rho G_n\,dv + \int_\Sigma g_n\,ds = -\varepsilon_{nij}\left(\int_C \rho x_i F_j\,dv + \int_\Sigma x_i f_j\,ds\right), \qquad y_i = x_i + u_i\,,
$$

the relation (3.5) becomes

$$
\theta(\varepsilon_{kij}Q_{jp}A_{ip} - \varepsilon_{nqr}Q_{kn}A_{qr}) = L_k, \tag{3.6}
$$

where

$$
A_{ij} = \int_C \rho x_i F_j\,dv + \int_\Sigma x_i f_j\,ds, \quad L_k = \varepsilon_{kij}\int_C R_{ip}u_{j,q}t_{qp}\,dv.
$$

As in [2] one can prove

Theorem 3.2. *If $F$ and $f$ do not posses an axis of equilibrium, then it is possible to find positive numbers $\alpha_1$, $\eta_1$ such that for $\eta < \eta_1$ one can determine other positive number $\alpha < \alpha_1$ for which the system* (3.6) *admits a unique solution satisfying the relation*

$$
|Q_{ij} - \delta_{ij}| < \eta,
$$

*when*

$$
|L| < \alpha\,|\theta|,
$$

*and $Q_{ij} = \delta_{ij}$ for $L_k = 0$.*

Theorem 3.3. *If the hypotheses* 1)—3) *are satisfied and $F$, $f$ do not posses an axis of equilibrium, then we can determine the positive numbers $\alpha'$, $\eta'$, $\theta'$ in such a way that, if $\eta < \eta'$ one can find other two $\alpha < \alpha'$, $\theta_0 < \theta'$, so that for every $|\theta| < \theta_0$ the system* (3.2) *has a unique solution satisfying the conditions*

$$| Q_{ij} - \delta_{ij} | < \eta, \qquad \| z \| < \alpha \, | \theta |^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem 3.4. *Under the same hypotheses as for Theorem* 3.3 *it is possible to find positive numbers* $\alpha''$, $\theta''$ *in such a way that if* $| \theta | < \theta''$ *the system* (1.11) *has a unique solution satisfying the conditions*

$$\| z \| < \alpha'', \qquad z(0) = 0.$$

If we assume that the strain energy function is an analytic function of its arguments then, as in [3], one can prove that the solution depends analytically on $\theta$.

*Received January 26, 1975*

*Institute of Mathematics, Jassy Division*

## REFERENCES

1. Kafadar C. B., Eringen A. C., *Micropolar media.* (I) *The Classical Theory.* Int. J. Engng. Sci., 9, 271–305 (1971).
2. Stoppelli F., *Un teorema di esistenza ed unicita relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite.* Ricerche Mat., 3, 247–267 (1954).
3. Stoppelli F., *Sulla sviluppabilita in serie di potenze di un parametro delle soluzioni delle equazioni dell'elastostatica isoterma.* Ricerche Mat., 4, 58–73 (1955).

## DESPRE DEFORMAREA FINITĂ A MEDIULUI COSSERAT

(Rezumat)

Tensorii de deformare din teoria nelinară a mediului Cosserat sînt exprimaţi cu ajutorul vectorilor deplasării şi a microrotaţiei. În cazul static, cînd mărimea încărcărilor exterioare este proporţională cu un parametru, folosind metoda lui Stoppelli se demonstrează o teoremă de existenţă şi unicitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.791

# CERCETĂRI PRIVIND SUDAREA PRIN FRECARE A UNOR PIESE DIN METALE DE NATURI DIFERITE

DE

VICTOR GHIZDAVU

## 1. Consideraţiuni generale

Între principalele avantaje ale sudării prin frecare trebuie inclusă şi posibilitatea de a obţine îmbinări corespunzătoare între două metale de naturi diferite, chiar dacă acestea prezintă diferenţe mari între temperaturile de topire, solubilitate redusă în stare solidă, tendinţa de a forma compuşi intermetalici sau faze fragile. De aici rezultă posibilitatea de a obţine piese metalice cu proprietăţi care nu pot fi întrunite la limita lor superioară de un singur metal sau aliaj; rezistenţă mecanică şi conductivitate electrică, conductivitate electrică şi rezistenţă la coroziune de contact, tenacitate şi duritate etc. Reuşita depinde, însă, de stăpînirea fenomenelor mecanice, termice şi metalurgice care au loc în zona de sudare, prin alegerea corespunzătoare a parametrilor de lucru.

La sudarea a două piese din metale de naturi diferite, căldura produsă prin frecare

$$Q = \frac{1}{J}\int_0^R \omega \, dM = \frac{2\pi}{J}\int_c^R \mu p \omega r^2 dr \qquad [\text{kcal/s}] \tag{1}$$

se repartizează pe cele două piese în cantităţile $Q_1$ şi $Q_2$

$$Q = Q_1 + Q_2, \qquad \text{cu} \qquad Q_1 \neq Q_2. \tag{2}$$

După legea Charron-Vernotte, căldura degajată prin frecarea a două corpuri cu aceeaşi geometrie şi cinematică se împarte între ele proporţional cu factorul

$$\varphi = \sqrt{\lambda \, c \gamma}, \tag{3}$$

deci se poate scrie

$$Q_1 = Q\frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}, \qquad Q_2 = Q\frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}. \tag{4}$$

Pe de altă parte, pentru o bară omogenă, în ipoteza temperaturii constante pe secţiune, ecuaţia căldurii cu schimb lateral este de forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{a}\frac{dT}{dt} - \frac{\alpha}{\lambda}(T - T_0) + \frac{q(t)}{\lambda} = 0. \tag{5}$$

Neglijînd schimbul lateral de căldură, Rikalin [1] a dat pentru această ecuaţie o soluţie de forma:

$$T(x, t) = \frac{Q\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\ \lambda\ c\ \gamma}}\ \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \tag{6}$$

unde $Q$ — căldura degajată prin frecare, cal/s; $M$ — momentul forțelor de frecare, daNcm; $\omega$ — viteza unghiulară, $s^{-1}$; J — echivalentul mecanic al caloriei (J = 1 : 427); $\mu$ — coeficientul de frecare între piese; $p$ — presiunea de contact, daN/cm²; $r$ — raza suprafeței inelare de grosime $dr$, cm; $\lambda$ — coeficientul de conductibilitate termică, cal/cm.s.°C; $c$ — căldura specifică a metalului, cal/kg°C; $\gamma$ — densitatea metalului, kg/cm³; $\alpha$ — coeficientul de transfer al căldurii, cal/cm² °C; $q$ — densitatea sursei de căldură, cal/cm²s; $q_1 = Q_1/\pi\ R^2$ și $q_2 = Q_2/\pi\ R^2$; $a$ — difuzivitatea termică, cm²/s ($a = \lambda/c\gamma$); $\Phi$ — funcție specială; $x$ — coordonata în lungul barelor, cu originea pe suprafața de contact; $T$ — temperatura pe coordonata $x$ și la timpul $t$, °C; $T_0$ — temperatura mediului, °C; 1, 2 — indici pentru cele două piese.

Datorită constantelor termofizice diferite metalele a căror sudare a fost experimentată ridică unele probleme specifice.

Procesele de egalizare a diferențelor de temperatură, și deci configurația cîmpului termic, depind de difuzivitatea termică $a$ care cumulează influențele combinate ale parametrilor $c$, $\gamma$ și $\lambda$. Cu cît difuzivitatea termică este mai mare, egalizarea temperaturii se face mai repede și, la celelalte condiții egale, gradienții de temperatură sînt mai mici.

Dacă comparăm difuzivitatea termică a metalelor, rezultă o ordine crescătoare de la fier, alamă Am 63, aluminiu, cupru și argint. Deci, tendința de transfer a căldurii în lungul barei este mai mare la argint, ceva mai mică la cupru și apoi urmează aluminiu, alama, cea mai mică fiind la fier, ceea ce face necesar ca și intensitatea sursei de căldură să fie mai mare la primele, respectiv vitezele de alunecare să fie mai mari. Un alt aspect este acela că, la metalele cu difuzivitate termică mai mare, este posibilă o mai rapidă egalizare a temperaturilor pe suprafețele de frecare decît la oțeluri.

La sudarea metalelor de naturi sau compoziții diferite, temperatura maximă atinsă pe suprafețele de frecare este determinată de metalul cu temperatura de plastifiere (eventual, punct de topire) cea mai scăzută. Acesta se deformează mai mult, face o bavură mai mare, materialul pereche prezentînd deformații foarte mici sau deloc. Vitezele mari de alunecare sînt favorabile unor temperaturi mai înalte, formării unor straturi plastifiate mai înguste, dispersări mai fine a compușilor fragili care se formează, bineînțeles, la apăsări de refulare corespunzătoare.

## 2. Partea experimentală

Sudarea s-a realizat pe mașina de sudat prin frecare experimentală, pe care am realizat-o la Academia militară, cu următoarele caracteristici principale [4]:

| | |
|---|---|
| diametrele limită ale pieselor, mm | 6—20 |
| turația relativă a pieselor, rot/min | 1 400—5 600 |
| apăsarea axială, kN | 0,5—40 |
| trepte de apăsare | 3 |
| puterea motorului prinicipal, kW | 7,5 |
| presiunea hidraulică maximă, N/cm² | 40 |

| | |
|---|---|
| timpul total de sudare, s | 3...60 |
| frînarea | electromagnetică |
| sistemul de comandă | electrohidraulică |
| dimensiuni de gabarit, mm | 1650×545×1240 |

Perechile de metale predate prin frecare au fost: Cu5 + Al 99,5; Cu5 + OL 50; Al 99,5 + OL50; Am63 + OLC45; Am63 + Al99,5; AlCu 4MgMn + Cu5.

La fiecare combinație de metale s-au efectuat 15...20 de suduri pentru determinarea regimului optim. Apoi, cu regimul stabilit, s-au sudat 10 îmbinări care au fost supuse la încercări.

Regimurile de lucru utilizate sînt date în tabelul 1. Cu excepția sudării aluminiului cu Cu5 sau OL50, la toate celelalte combinații de materiale s-a lucrat cu turația maximă ($n = 5\,600$ rot/min) rezultînd îmbinări corespunzătoare și o zonă influențată termic redusă (4...8 mm). Turația mai joasă la sudarea aluminiului a fost necesară pentru a reduce bavura care la turații mai mari tinde să ia proporții exagerate. Din aceleași motive s-a lucrat și cu apăsări mai mici.

De asemenea, din cauza frecării sacadate, a vibrațiilor transversale puternice și a cuplului maxim de frecare care depășea pe cel disponibil al mașinii, a fost necesar ca la sudarea combinațiilor Cu 5 + OL 50 și AlCu4 MgMn + Cu 5 să se realizeze încălzirea în două trepte de apăsare: $p_1$ pînă la plastifierea materialului la una din piese, și $p_2$ în continuare ($p_1 < p_2$).

În ce privește deformarea (scurtarea) barelor sudate, aceasta a fost mai pronunțată de partea metalului cu punctul de fuziune cel mai coborît, cu excepția combinației Cu 5 + OL 50 la care refularea a fost aproximativ egală de ambele părți. Pentru a reduce această deformare, bara respectivă s-a ales cu diametru mai mare.

**Tabelul 1**

*Regimuri de lucru utilizate la sudarea prin frecare*

| Nr. crt. | Materialele sudate | Diametre mm | Turația $n$ rot/min | Presiuni daN/mm² | | | Timpul s | | | Refulare mm | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $u_1 + u_2$ | $u_3$ | $u$ |
| 1 | Cu5+Al 99,5 | 16+18 | 5 600 | — | 2 | 2 | — | 3 | — | 2 | 4 | 6 |
| 2 | Cu5 + OL50 | 16 | 5 600 | 2 | 4 | 6 | 3 | 7 | — | 2 | 2 | 4 |
| 3 | Al 99,5 + OL 50 | 18+16 | 2 800 | — | 1,5 | 3 | — | 3 | — | 3 | 4 | 7 |
| 4 | Am 63 + OLC 45 | 18+16 | 5 600 | — | 4 | 5 | — | 4 | — | 3 | 2 | 5 |
| 5 | Am 63 + Al 99,5 | 18+18 | 2 800 | — | 2 | 4 | — | 4 | — | 3 | 4 | 7 |
| 6 | AlCu 4MgMn + Cu 5 | 20+18 | 5 600 | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 | 6 | 2 | 2 | 4 |

Indicii se referă: 1 — la treapta de preîncălzire; 2 — la treapta de încălzire; 3 — la refulare.

### 3. Verificarea calității îmbinărilor sudate prin frecare

Calitatea îmbinărilor din metale de naturi diferite, realizate, a fost verificată prin încercări mecanice la întindere, controlul microstructurii, controlul durității, probe de îndoire.

Încercarea la întindere s-a efectuat pe cîte 6 epruvete scurte ($d = 10$ mm, $l = 5\,d$). Rezistența la rupere $\sigma_r$, alungirea la rupere $\delta_s$ și localizarea ruperii sînt arătate în tabelul 2. Pe baza datelor obținute se poate conchide că toate combinațiile de metale sudate prezintă rezistențe comparabile cu ale metalului de bază cu rezistența cea mai mică. Rezistența cea mai scăzută o prezintă cuplul de metale AlCu 4MgMn + Cu 5 și aceasta se datorește durificării incomplete a acestuia prin îmbătrînire naturală.

Alungirile au în general valori mici, deoarece de regulă numai unul din metale se deformează plastic la proba de întindere.

În tabelul 2 mai sînt indicate figurile cu metalografiile respective, iar la 3 combinații de metale sudate și rezultatele încercărilor la îndoire.

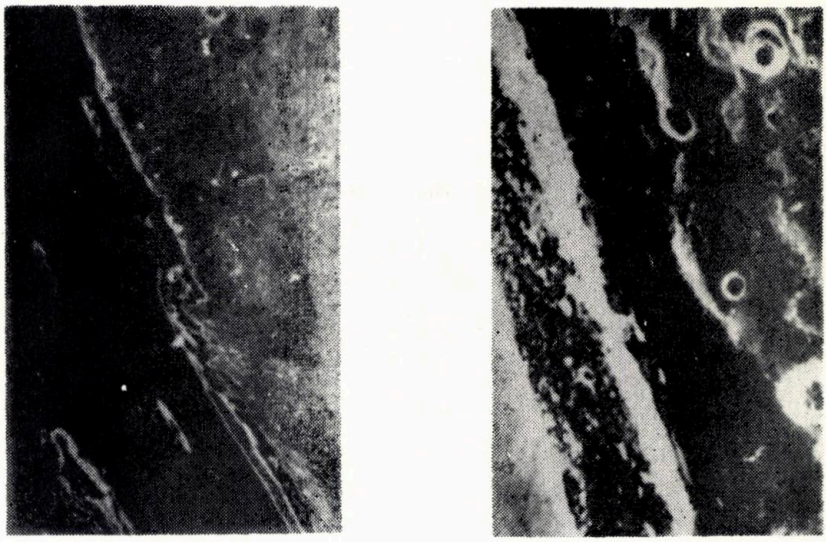
**Tabelul 2**

*Rezultatele încercărilor asupra metalelor sudate prin frecare*

| Nr. crt. | Materialele sudate | Diametre mm | $\delta_r$ daN/mm$^2$ | $\delta$ % | Locul ruperii, $X$ mm | Metalografia | Alte încercări |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Cu5 + Al 99,5 | 16 + 18 | 16...19 | 9 | Al $X =$ = 2...4 | fig. 1 | îndoire 180° × Ø30 |
| 2 | Cu5 + OL 50 | 16 | 26...30 | 7...9 | Cu $X =$ = 0...4 | fig. 3 | îndoire (160...180°) × Ø 30 |
| 3 | Al 99,5 + OL 50 | 18+16 | 16...20 | 8...10 | Al $X =$ = 0...2 | fig. 5 | — |
| 4 | Am 63 + OLC 45 | 18 + 16 | 40...40 | 20...23 | Am $X =$ = 1...5 | fig. 2 | — |
| 5 | Am 63 + Al 99,5 | 18 + 18 | 16...20 | 12 | Al $X =$ = 2...6 | fig. 6 | îndoire 180° × Ø30 |
| 6 | AlCu4MgMn+Cu5 | 20 + 18 | 32...38 | 5 | AlCu4Mg ×Mn $X =$ = 0,5...3 | fig. 4 | — |

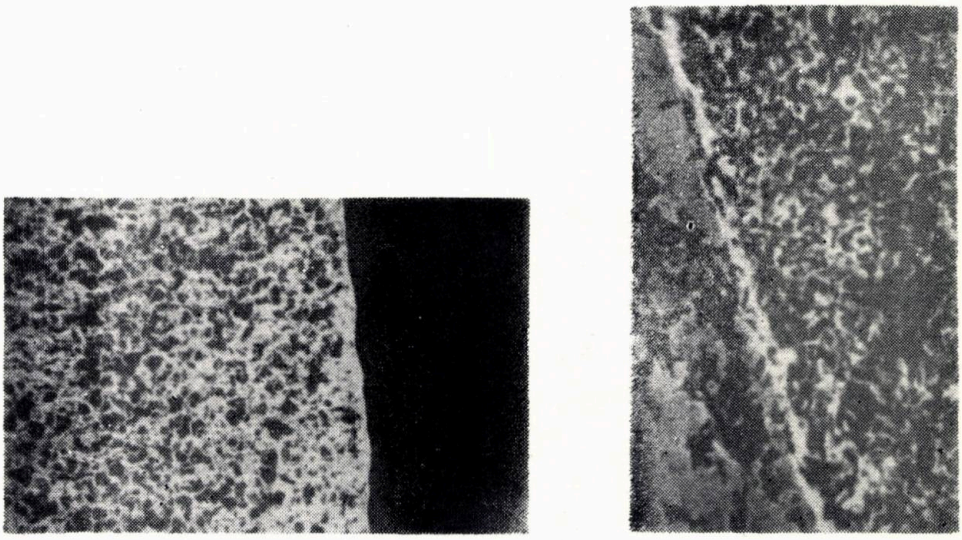
$X$ — distanța de la sudura la care s-a produs ruperea.

La sudarea materialelor cu compoziții diferite, intensitatea procesului de difuziune depinde de temperaturile și duratele de menținere care se realizează, de mobilitatea atomilor elementelor componente la temperaturile respective, de afinitățile existente între diferitele elemente. Difuziunea poate avea loc între particule ale amestecului mecanic sau între straturile în contact. De aceea în structura zonei sudurii pot apare amestecuri mecanice în diferite grade de dispersie, aliaje cu altă compoziție decît aceea a metalelor de bază, compuși intermetalici sau faze noi. Toate acestea fac ca zona sudurii la îmbinarea unor materiale diferite să fie eterogenă ca compoziție și structură.



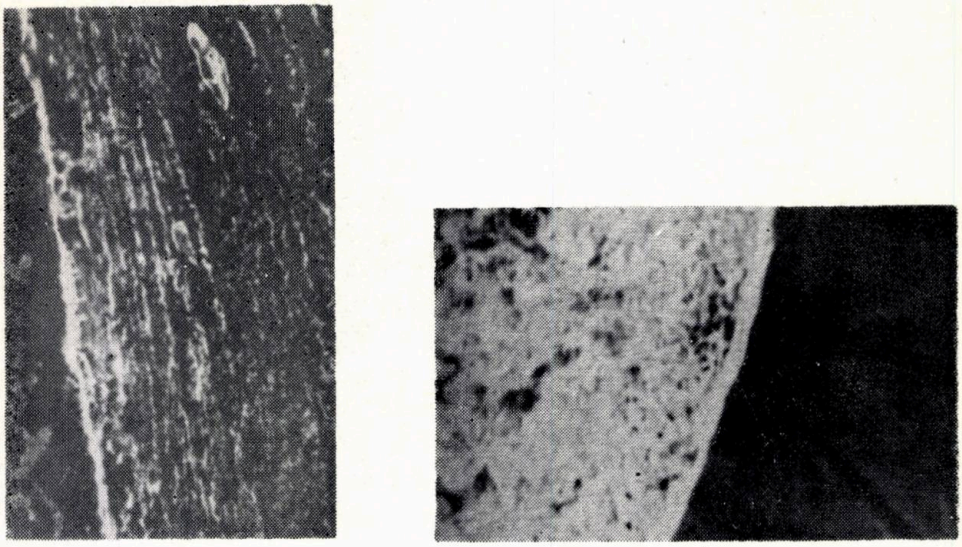
*a* *b*

Fig. 1 — Microstructuri la sudarea aluminiului Al 99, cu cuprul Cu 5(1 000 ×) la microscop electronic Scanning: *a* — atac pe cupru, *b* — atac pe aluminiu.



*a* *b*

Fig. 2 — Microstructura sudurii între oțel OLC 45 și alamă Am 63, la microscop electronic Scannning: *a* — atac pe oțel (100 ×), *b* — atac pe alamă (1 000 ×);



*a* *b*

Fig. 3 — Microstructura sudurii între oțel OL 50 și cupru Cu 5, (1 000 ×) la microscop electronic Scanning: *a* — atac pe oțel, *b* — atac pe cupru.

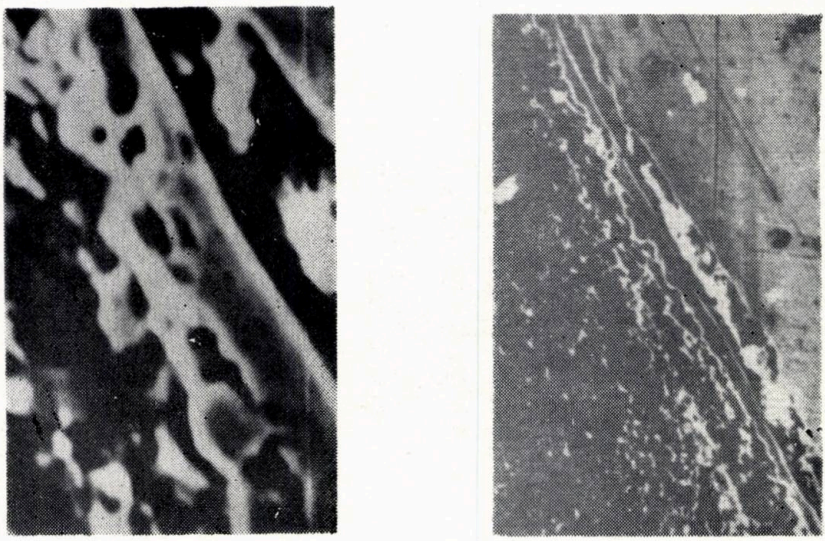
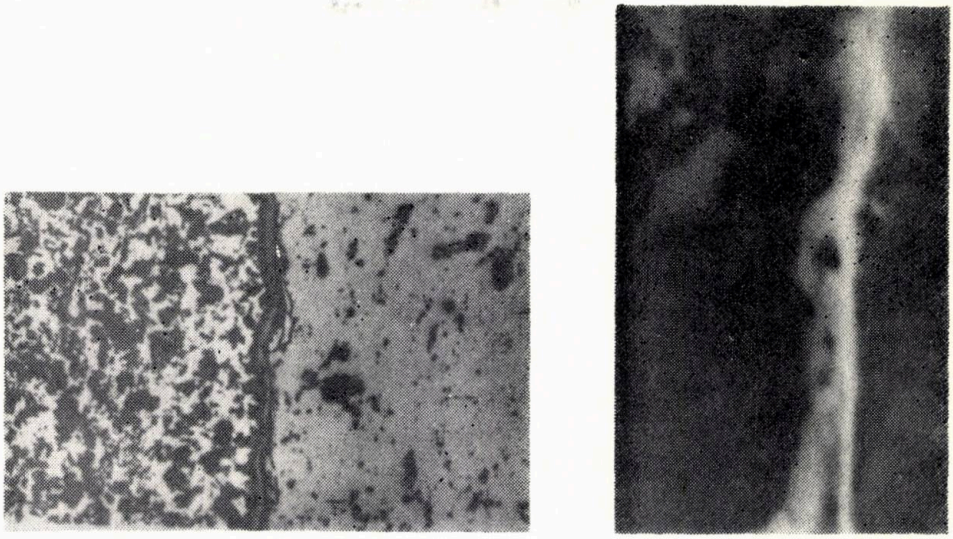


Fig. 4 — Microstructura sudurii între duraluminiu AlCu 4 MgMn și cupru Cu 5, la microscop electronic Scanning, atac pe duraluminiu: *a* — mărire 1 000 ×; *b* — mărire 5 000 ×;



*a* *b*

Fig. 5 — Microstructura îmbinării între oțel OL 50 cu aluminiu Al 99,5 : *a* — la microscop optic, atac oțel (300 ×) ; *b* — la microscop Scanning, atac aluminiu (3 000 ×).

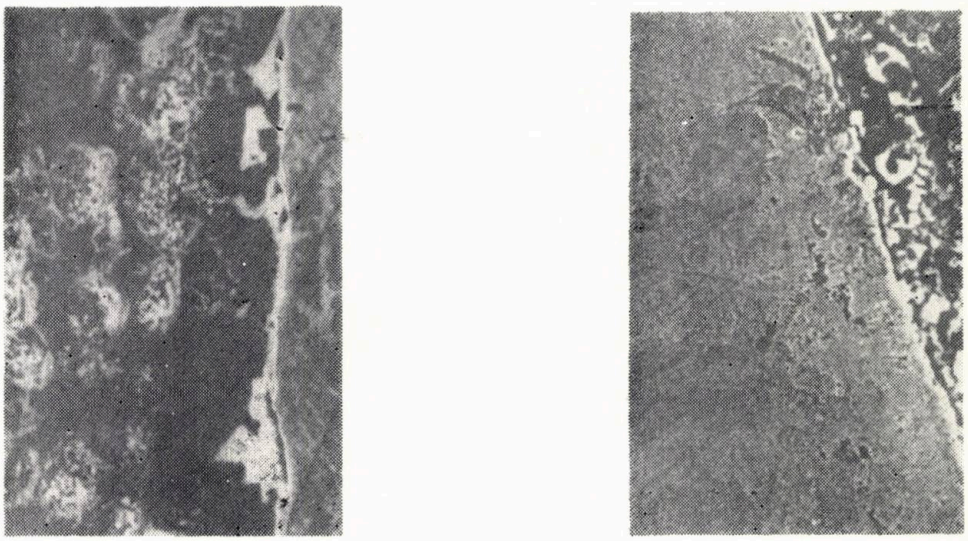


Fig. 6 — Microstructura îmbinării alamei Am 63 cu aluminiu Al 99,5 (1 000×) la microscop electronic Scanning : *a* — atac pe alamă, *b* — atac pe aluminiu.

În fig. 1 sînt date aspecte structurale obținute la sudarea aluminiului Al 99,5 cu cuprul Cu5. În zona sudurii se constată prezența unor particule de Cu care străbat în piesa de aluminiu, precum și formarea eutecticului cu 67% Al și 33% Cu avînd o grosime de 10 μm. Aceasta confirmă faptul că aici s-a atins o temperatură vecină punctului eutectic (548°C) [2]. În afara zonei de sudură, aluminiul prezintă o structură orientată în care sînt cuprinse o mulțime de impurități microscopice. De partea cuprului se păstrează o structură cu cristale alungite.

Sudarea alamei Am 63 cu oțelul OLC 45 se face de asemenea la un nivel termic mai coborît, datorită faptului că alama devine plastică înaintea oțelului. Dovada o constituie și forma îmbinării caracterizată prin bavură mare de partea alamei, aceasta fiind aproape absentă de partea oțelului. Ca urmare procesul de difuziune peste suprafața de contact este mai redus iar stratul de aliaj ternar Cu-Zn-Fe are o grosime mai mică, care nu depășește 2...3 μm (fig. 2). De partea oțelului în afară de un strat subțire recristalizat, nu se evidențiază alte modificări. În schimb de partea alamei la marginea interaliajului amintit, apare o zonă subțire cu tendință mai accentuată de separare a fazei β ca urmare a îngustării domeniului α datorită prezenței fierului. În această zonă se localizează de regulă ruperea la întindere a epruvetelor. Mai departe, faza β se rărește pentru ca la cca. 5 mm să se atingă structura inițială a barei de alamă.

La sudarea cuprului Cu 5 cu oțel OL 50 (fig. 3), după sudare, cele două metale apar separate de un strat de aliaj FeCu cu grosimea de 5 μm. De partea oțelului în apropierea acestuia perlita este fină și apoi treptat devine tot mai mare pînă se atinge structura metalului de bază. De partea cuprului imediat lîngă stratul de aliaj CuFe apare o structură orientată, paralelă cu linia sudurii. În materialul de bază Cu 5 la mărirea 1 000× se manifestă prezența eutecticului Cu-$CuO_2$.

În zona de sudură a duraluminiului AlCu4MgMn cu cuprul Cu 5 este caracteristică apariția (fig. 4) la separația între cele două piese a unui strat de cca. 15 μm de interaliaj. După [2] acest strat constă din eutecticul Cu-Mg, cu 69,3% Mg avînd temperatura de topire 485°C. Mai departe în zona imediat vecină a duraluminiului apare o structură orientată paralel cu linia sudurii, orientare care se datorește antrenării tangențiale, în faza de încălzire, a unui strat metal plastifiat de pe suprafața de contact a piesei de duraluminiu.

Îmbinarea cu ajutorul sudării prin frecare a unei piese din Al 99,5 cu OL 50 conduce la microstructurile din fig. 5. Zona sudurii se caracterizează printr-un strat subțire (1...2 μm) și discontinuu de culoare cenușie deschisă de $FeAl_3$. Grosimea lui depinde de regimul de sudură aplicat. La regimuri de încălzire mai înalte ($n$ și $p$ mai mari), el devine continuu și de grosime mai mare, și datorită fragilității lui calitatea îmbinării se înrăutățește. În schimb cu creșterea presiunii de refulare în limite corespunzătoare, plasticitatea îmbinării se îmbunătățește.

Temperatura maximă pe suprafața de contact poate atinge 645°C și se situează sub temperatura eutecticului cu 98,2% Al care este de 655°C [2].

La sudarea combinației Al 99,5 cu Am 63 (fig. 6) între cele două metale se formează un strat intermediar constînd dintr-un aliaj complex de Al-Cu-Zn, cu formarea eutecticului ternar avînd 98,1% Zn, 7,05% Al și 3,85% Cu [3]. Grosimea mică a acestui strat (1...3 μm) se explică prin temperatura mică ce se atinge în zona de îmbinare, situată sub temperatura eutectică de 377°C. Din aceeași cauză zona influențată termic este foarte redusă și conține de ambele părți ale îmbinării cristale provenind din recristalizarea metalului care a fost ecruisat înainte de sudare.

În privința durităților măsurate, situația este rezumată în tabelul 3. Se constată că cu excepția oțelului și a duraluminiului, toate celelalte metale prezintă o scădere a durității în zona influențată termic; scădere ce trebuie atribuită recristalizării unor structuri ecruisate. De asemenea cu excepția combinațiilor de metale unde de o parte este o piesă de oțel și ca urmare în zona de sudură apare o duritate de tranziție spre metalul mai moale, în toate celelalte cazuri în zona sudurii apar durități mai mari comparativ cu cele ale ambelor metale sudate, care se datoresc noilor compuși sau faze care s-au format.

**Tabelul 3**

*Durități măsurate la piesele sudate*, HB

| Combinația sudată 1 + 2 | Zona sudurii | Influențată termic | | Metalul de bază | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 1 | 2 |
| Cu5 + Al 99,5 | 72 | 62 | 28 | 70 | 34 |
| Cu 5 + OL 50 | 100 | 58 | 170 | 70 | 176 |
| Al 99,5 + OL 50 | — | 26 | 170 | 36 | 176 |
| Am 63 + OLC 45 | 146 | 45 | 220 | 54 | 225 |
| Am 63 + Al 99,5 | 90 | 48 | 26 | 62 | 34 |
| AlCu 4 MgMn + Cu 5 | 130 | 95 | 64 | 98 | 70 |

## 4. Concluzii

1. Pe baza încercărilor de sudare prin frecare efectuate și a verificărilor la care au fost supuse îmbinările obținute, s-au stabilit regimuri de lucru care permit îmbinări de bună calitate, în cazul combinațiilor de metale: Cu 5 + Al 99,5; Cu 5 + OL 50; Al 99,5 + OL 50; Am 63 + OLC 45; Am 63 + Al 99,5 și AlCu 4 MgMn + Cu 5.

2. Probele metalografice și încercările de duritate au confirmat formarea în zonele de sudare a unor aliaje complexe, compuși intermetalici sau faze noi. Aceste modificări se datoresc difuziunii elementelor componente a celor două metale, peste suprafața de contact, pe o lățime de 3...15 μm. Stratul astfel format este cu atît mai îngust cu cît turațiile sînt mai mari, duratele de încălzire mai scurte și apăsarea de refulare mai ridicată, fără a depăși limitele la care se poate produce fisurarea materialelor.

*Primită la 1 septembrie 1975*

*Academia Militară, București*

## BIBLIOGRAFIE

1. Вавилов А. Ф., Воинов В. П., *Сварка трением*. Машиностроение, М., 1964.
2. Hasui A., Fukushima S., Kunigawa J., *Experimental Studies of Friction Welding Phenomena*. W. Doc. III — 369, 1969.
3. Gîdea S., Protopopescu M., *Aliaje neferoase*. Ed. Tehn., Buc., 1965.
4. Ghizdavu V., *Consideraţiuni privind elaborarea ciclului de lucru la sudarea prin frecare*. Comunicare CNIIT, 15—16 martie 1974, Bucureşti.

## RECHERCHES CONCERNANT LE SOUDAGE PAR FRICTION DES PIÈCES DE MÉTAUX AYANT DES NATURES DIFFÉRENTES

(Résumé)

On présente les résultats des recherches du soudage par friction des barres de métaux ayant des natures différentes : cuivre, aluminium ou cuivre jaune avec de l'acier.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

УДК. 696.2

# НОВАЯ МОДЕЛЬ УСТАНОВКИ ДЛЯ ОДОРАЦИИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ГАЗОВ

МИРЧА ЗУГРЭВЕЛ, КОНДРАТ-АДРИАН ХОМУТЕСКУ
и РАДУ ГАЙДЖИНСКИ

## 1. Введение

Естественные газы представляют собой смесь различных углеводородов размещёных в газообразном состоянии в пористых породах или растворенные в нефти находящейся в месторождениях и для большинства газовых месторождений в С. Р. Румынии содержат более 98% метана. Естественные газы играют особенную роль в современной экономике, как топливо с большой теплотворностью и как важный исходной материал для химической промышленности.

Естественные газы не имеют собственного запаха. Для выявления эманации газов во ремя транспорта, распределения и употребления, им сообщается — при помощи присадок — отличительный, настойчивый и легко ощутимый запах. Используются присадки в виде смесей органических веществ имеющих серы (тиоэфиры, дисульфиды, меркаптаны и др.), которых обычно называют средства для одорации. Операциа включения этих веществ в состав естественных газов называется одорация.

В нашей стране для одорации газов употребляется этилмеркаптан. По нормам, одорация осуществляется в пределах 1,1 и 1,4 кГ этилмеркаптана концентрации 100%, что обеспечивает выявление запаха газов в смеси с воздухом на пятой доле нижнего предела взрыва. (Нижний предел взрыва — это объемная концентрация 5 частей газов в 100 частях смеси воздух — газы и принимается коэффициент безопасности равный 5 [1]).

Одорация осуществляется при помощи капельницных установок для одорации для газовых расходов до 20.000 нм$^3$/суток и испаряющих установок для расходов превышающих 20.000 нм$^3$/суток. Капельницные установки, а также и испаряющие установки имеют преимущество простоты конструкции, но и недостатки — главный из них необеспечивание необходимой пропорциональности между расходом газов и употребляемым количеством средства для одорации.

Существуют также и установки для одорации впрыскиванием, установленные на газопроводах постоянного давления. Эти установки включают средства для одорации в трубопровод при помощи насосов регулируемых дифференциальным давлением образуемым в трубке Вентури установленой в потоке газов. В газорповодах с переменным статическим давлением вышеупомянутые установки не обеспечивают необходимую пропорциональность — предпочитается испаряющие установки, регулирование которых поручается рабочему.

Имея в виду огромные количества употребляемых естественных газов и большую опастность случайных эманаций газов, усовершенствование одорации представляет актуальное и важное направление технического прогресса в газовой промышленности. Преследуются два главных пути : нахождение новых средств для одорации с целесообразными качествами и осуществление новых усовершенственных установок для одорации.

Сюда включаются и механические впрыскивающие установки для одорации, с дозировочными насосами регулируемые в зависимости от параметров газового потока : давление и расход, осуществление которых представляет долговременую заботу исследовательского коллектива при Кафедре двигателей внутреннего сгорания и Кафедру механоэнергетики. Осуществление и испытание этих установок в лаборатории и в промышленности привело к разработке оригинальных решений, часть которых признана патентами.

## 2. Конструкция у действие впрыскивающей установки для одорации

Впрыскивающая установка для одорации (рис. 1) составлена из следующих функциональных частей: *I* – бак средства для одорации с арматурой, *II* – группа двигатель-дозировочный насос, *III* – регулирующее устройство и *IV* — часть газопровода куда включается установка. Питание насоса средством для одорации осуществляется из бака

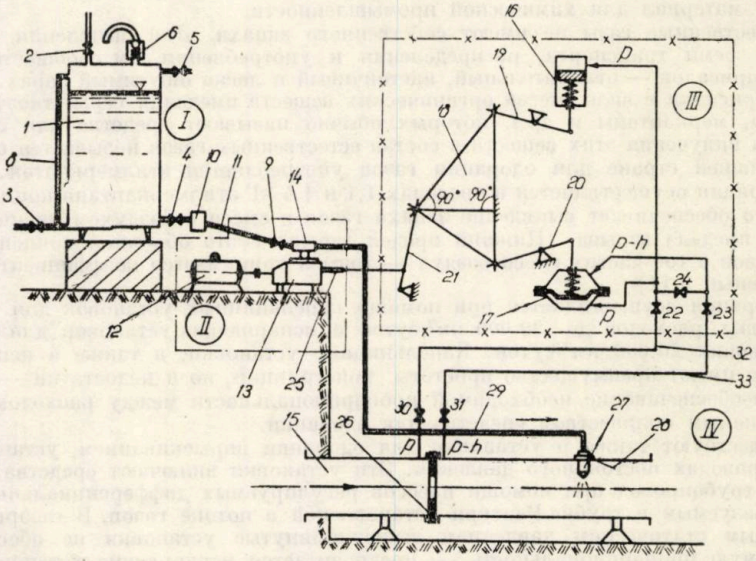



Рис. 1. — Схема впрыскивающей установки для одорации.

*1* снабжёный кранами *3*, *2*, *4* и *5*, клапаном *6*, потрубком питания *7* и водомерным стеклом *8*. Арматура бака позволяет наполнить бак через потрубок 7 легким давлением газа нажимая на уровень в бочке для транспорта этилмеркаптана, полное опораживание бака или питание действующего насоса. Клапан *6* обеспечивает малую депрессию в баке, непозволяя пару этилмеркаптана выйти в атмосферу. Этилмеркаптан питает дозировочный насос через цепь состоящей из кранов *4* и *9*, фильтр

*10* и провод *11*. Насос приведен в действие взрывобезопасным электродвигателем *12*. Насос состоит из приводной установки *13* и из собственнонасосо-дозировочной секции *14*.

Дозировочный насос (2) — главный элемент установки. На рис. 2 замечается, что насосная секция состоит из мембраны *34* и всасывающего *35* и выпускного *36* клапанов. Мембрана ограничивает насосный объем *A*. Действующая часть содержит плунжер *37* который перемещается в втулку *38*, под действием кулачка *39* и толкателя *40*. Пружина *41* обеспечивает постоянный контакт между кулачком и толкателем. Между насосной и действующей частями насоса находится объем-тампон *B*, со-

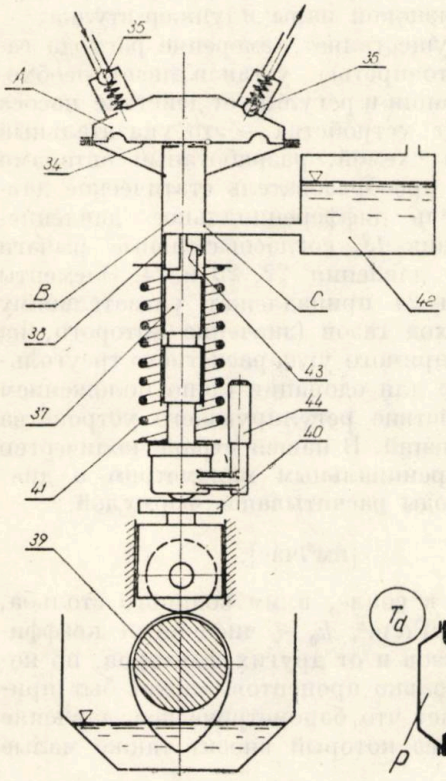



Рис. 2. — Схема дозировочного насоса.

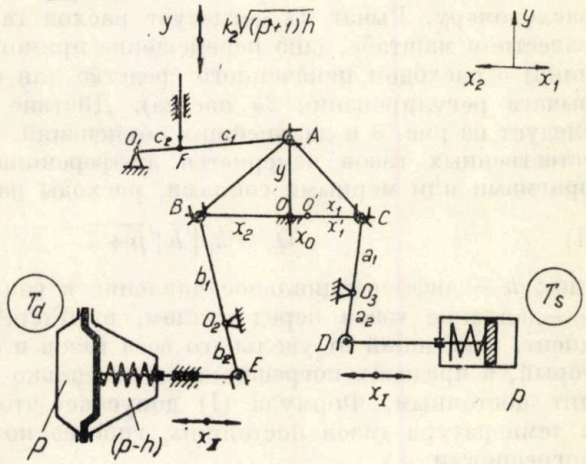



Рис. 3. — Схема регулирующего устройства.

общающийся с наружным баком для масла *42*, через соединительное отверстие *C* в втулке *38*. Отверстие *C* закрывается и открывается при перемещении плунжера *37* самим плунжером. Накачивание осуществляется периодическим перемением насосного объема под действием движения плунжера *37*. Таким образом происходит всасывание этилмеркаптана из бака через клапан *35*, повышение давление и выпускание к форсунке *27* (рис. 1) через клапан *36*. Отверстие *C* представляет возмож-

ность перемены хода мембраны *34* и в следствии перемени цикловой подачи. Ход мембраны *34* изменяется при перемене времени закрытия отверстия *C*, т. к. ход плунжера *37* активный, т. е. передаётся мембране *34* через находящееся в объеме-тампон *B* масло, только во время открытия отверстия *C*. Время закрытия сооденительного отверстия можно изменить профилированием торцевой части плужера *37* с эликойдальным ребром *43*, завися от относительной позиции между ребром и отверстием. Позиция ребра *43* перед отверстием *C* изменяется вращением плунжера вокруг собственной оси, с помощью ручьки *44* фиксированной в нижней части плунжера. Масло находящееся в объеме *B* исполняет двойную роль : материальный суппорт для передачи движения плунжера *37* к мембране *34* и для смазки прецизионой пары плунжер-втулка.

Регулирующее устройство *III* осуществляет измерение расхода газов в газопроводе *15* с технической точнрстью, устанавливает необходимое количества средства для одорации и регулирует действие насоса на нужный расход. Главный элемент устройства — это указательный расходомер с механической расчетной схемой, разработаный авторами [3]. Элементы устройства следующие : преобразователь статическое давление-перемещение *16*, преобразователь дифференциальное давление-перемещение *17*, расчётный треугольник *18*, согласовательные рычаги *19*, *20* и *21* и группа кранов высокого давления *22*, *23* и *24*. Элементы *16*, *17*, *18*, *19* и *20* и краны *22*, *23* и *24* принадлежат указательному расходомеру. Рычаг *21* согласует расход газов (значение которого, на известном маштабе, дано перемещение прямого угла расчетного треугольника) с расходом накаченного средства для одорации (дано положением рычага регулирования *25* насоса). Дйствие регулирующего устройства следует из рис. 3 и дальнейших объяснений. В нашей стране количество естественных газов измеряется дифференциальным манометром и диафрагмами или мерными соплами, расходы расчитываясь формулой :

$$Q_0 = k_0 \sqrt{h} \sqrt{p+1} \qquad [\text{нм}^3/\text{час}], \tag{1}$$

где : $h$ – дифференциальное давление в сопле, в мм водяного стольба, $p$ – давление газов перед соплом, в кГ/см$^2$, $k_0$ – численный коэффициент, зависящий от удельного веса газов и от других факторов, но который, в пределах погрешности в несколько процентов, может быт принят постоянным. Формула (1) допускает что барометрическое давление и температура газов постоянны, гипотез который вносит также малые погрешности.

Устройство представленное на рис. 3 измеряет величины из формулы (1) и выполняет расчёты : умножение и извлечение корня. Преобразователь статического давления *16* и дифференциального давления *17* превращают соотвественые величины в пропорциональные перемещения $x_{\text{I}}$ и $x_{\text{II}}$, которые при помощи увеливающих рычагов $BO_2E$ и $CO_3D$ передаются болтам *B* и *C* треугольника *ABC*. Конструкциа расчётного треугольника (с прямым углом в точке *A*) позволяет точкам *B* и *C* перемещатся вдоль сторон *AB* и *BC*, и соответственно *AC* и *BC*, а точке *A* перемещатся вдоль высоты треугольника *AO*. Одновременно, болты материализирующеи точки *A*, *B* и *C* вращаются в шарнирах, позволяя

деформацию треугольника, поддерживая угол $A$ постоянным. Точка $B$ перемещается от начала $O$, а точка $C$ от начала $O'$, сегмент $OO'$ представляя в маштабе постоянную величину $x_0 = 1$ кГ/см². Простые расчёты показывают, что растояние точки $A$ от начала $O$ равно

$$y = k\sqrt{x_0 + x_1'}\sqrt{x_0} = \sqrt{K_1\frac{a_1}{a_2}(p+1)\,K_2\frac{b_1}{b_2}h} = k_1\sqrt{h}\sqrt{p+1}\,, \tag{2}$$

где : $K_1$ и $K_2$ — константы характеризующие конструкцию преобразователей *16* и *17*, $k_1$ — новая константа, т. е. приследует изменения расхода газов в газопроводе. Через рычаг $OFA$, согласующий выходящию величину $y$ с соответствующими величинами расхода насоса, описанный механизм обеспечивает перемещение рычага регулирование насоса величиной

$$Y = \frac{c_2}{c_1 + c_2}y = k_2\sqrt{h}\sqrt{p+1}\,, \tag{3}$$

где $k_2$ — новая константа. Сопоставление формул (1) и (3) подтверждает обеспечение действия насоса на необходимый расход для одорации, вышеописаным устройством.

Последняя часть установки содержит газопровод *15* на который монтируется сопло *26* и форсунка *27*, при помощи держащей детали *28*, сваренной в стенку газопровода. Связь между насосом *14* и форсункой *27* обеспечивается через провод высокого давления *29*. Краны *30* и *31* изолируют проводы *32* и *33* связывающие отводы давления от и входы в преобразователи регулирующего устройства.

## 3. Выводы

Для улучшения одорации естественных газов было проектировано, создано и испытано в лабораторных условиях и в длительном действие в промышленности на одной станции регулирования, измерения и распределения естественных газов в Молдавии оригинальная впрыскивающая установка одорации газов, основанная на использовании дозирующего мембранного насоса и механической системы регулирования расхода средства для одорации в зависимости от расхода газов. Осуществлённая установка имеет крепкую и достаточно простую конструкцию, что придаёт увериность действия. Установка автоматично поддерживает необходимую степень одорации и в тоже время обеспечивает скорую гомогенизацию распыленного средства для одорации с естественными газами.

*Поступила в 1 XI 1975 г.*

*Ясский политехнический институт,*
*Кафедра механоэнергетики*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Drug V., Ungureanu O., *Transportul gazelor naturale.* Ed. Tehn., Buc., 1972, pp. 230–236.
2. Zugrăvel M., Bornea V., *Pompă dozatoare cu membrană acționată hidraulic.* Brevet de invenție R. S. R. nr. 55.163.
3. Zugrăvel M., Homutescu C. A., Gaiginschi R., *Debitmetru diferențial indicator pentru gaze naturale transportate prin conducte.* Calitatea producție și metrologie, III (XX), *10*, 622–627 (1973).

## UN NOU TIP DE ISTALAȚIE PENTRU ODORIZAREA GAZELOR NATURALE

(Rezumat)

Se prezintă construcția și funcționarea unei instalații originale pentru odorizarea gazelor naturale prin injecție, bazată pe folosirea unei pompe dozatoare cu membrană și a unui sistem de comandă și reglare mecanică, care urmărește variațiile debitului de gaze, menținînd gradul de odorizare necesar.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.951.3

# CERCETĂRI ASUPRA UZURII ȘI DURABILITĂȚII BURGHIELOR ELICOIDALE [1])

DE

GH. CAȘLER, VITALIE BELOUS, MIRCEA COZMÎNCĂ, BORIS PLĂHTEANU, M. ROMANIȚĂ și M. AELENEI

## 1. Introducere

Uzura burghielor elicoidale se poate manifesta sub cinci forme, care pot apare simultan sau separat, și anume: uzura suprafețelor de așezare, uzura suprafețelor de degajare, uzura vîrfurilor principale, uzura fațetelor elicoidale, uzura tăișului transversal.

Dintre aceste tipuri de uzuri, uzura suprafețelor de degajare apare foarte rar și nu reprezintă un factor limitativ în ceea ce privește utilizarea burghielor, iar uzura tăișului transversal, care se manifestă sub formă de bontiri sau știrbituri, capătă importanță numai la prelucrarea materialelor dure, prin creșterea corespunzătoare a forței de avans.

Plecînd de la aceste constatări, cercetările întreprinse în cadrul catedrei de Mașini-unelte și scule din Iași, efectuate la cererea Centrului de cercetări și proiectări mecanică fină și scule din București, s-au concentrat pe studiul uzurii suprafețelor de așezare, a vîrfurilor principale și a fațetelor elicoidale.

Temperatura din zona de așchiere fiind un factor determinant pentru apariția și evoluția uzurii sculelor așchietoare, analiza uzurii și durabilității burghielor trebuie să se facă plecînd de la conceptul de încărcare energetică unitară.

Într-adevăr, relația încărcării energetice unitare, particularizată pentru cazul burghierii, evidențiază că, cantitatea de căldură degajată în unitatea de timp pe unitatea de lungime a tăișului, precum și temperatura de așchiere cresc spre razele mari ale burghiului, atingînd valori maxime în zona vîrfurilor principale. Dacă la acest efect se adaugă frecările fațetelor elicoidale de peretele găurii prelucrate, precum și condițiile înrăutățite de evacuare a căldurii prin conducție în dintele burghiului, rezultă că uzura suprafețelor de așezare trebuie să fie accentuată în zona vîrfurilor principale, transformîndu-se uneori în rotunjirea acestora sau continuînd cu uzura fațetelor elicoidale.

[1]) Prezentată la a II-a Conferință națională de scule, Brașov, 1972.

Este de presupus, de asemenea, că gradientul de creștere a uzurii suprafețelor de așezare spre razele mari ale burghiului va rezulta variabil, funcție de natura materialului prelucrat, de parametrii regimului de așchiere și de sistemul de ascuțire adoptat.

Încercările experimentale efectuate în cadrul Laboratorului de Mașini-unelte și scule de la Institutul politehnic din Iași au avut drept scop tocmai precizarea calitativă și cantitativă a acestor aspecte, cu o eventuală posibilitate de elaborare a unor normative științifice privind exploatarea și consumul burghielor elicoidale din oțel rapid.

## 2. Condiții de lucru și rezultate experimentale

Au fost încercate la uzură burghie elicoidale fabricate de I. S. Rîșnov, executate din oțel rapid, marca $Rp_3$, în conformitate cu STAS 573—67 (∅ 3 ; 4 ; 10 ; 15 ; 19 ; 22 mm) și STAS 574—67 (∅ 3 ; 7 ; 12 ; 15 ; 17,5 ; 20 mm).

Încercările s-au executat pe două mașini de găurit (G 40 și A 2) și pe materialele prezentate în tabelul 1.

Burghierea oțelurilor și a aliajului de aluminiu s-a efectuat în prezența unui debit de 4 l/min de emulsie Dero R + Dero RA 5%, iar burghierea fontei s-a efectuat fără lichide de răcire-ungere.

Tabelul 1

| Materialul încercat | Duritatea și rezistența la rupere daN/mm² | Dimensiunile eșantioanelor încercate $B \times H \times L$ mm |
|---|---|---|
| 13CN35, STAS 791-66 | HB = 200...269<br>$\sigma_r$ = 70...95 | 80 × 80 × 500 |
| OLK4, STAS 2883-62 | HB = 130<br>$\sigma_{r\text{mediu}}$ = 45 | 25 × 350 × 1 000 |
| $F_c20$, STAS 568-61 | HB = 170...241<br>$\sigma_{r\text{mediu}}$ = 21 | 70 × 215 × 570 |
| Aliaj din aluminiu STAS 201-71 | — | 70 × 215 × 570 |

Ascuțirea și reascuțirea burghielor elicoidale s-au efectuat după sistemul ascuțiri normale, utilizînd procedeul elicoidal, varianta Suhov de pe mașina model 3659 A.

S-au executat și încercări de uzură cu burghie ascuțite de I. S. Rîșnov după procedeul cilindro-eliptic și cu burghie ascuțite în Laboratorul de mașini-unelte și scule după procedeul ELBITOR [2].

Parametrii regimului de așchiere s-au stabilit după recomandările normativelor M. M. C. M, utilizînd cîte 3—4 valori, valorile mijlocii fiind cele economice.

Citirea valorilor $h_a$ ale fațetelor de uzură de pe suprafețele de așezare s-a făcut după un anumit număr de găuri executate. S-au trasat apoi curbele de evoluție a uzurii în timp pentru diferite viteze de așchiere (fig. 1) și diferite avansuri (fig. 2).

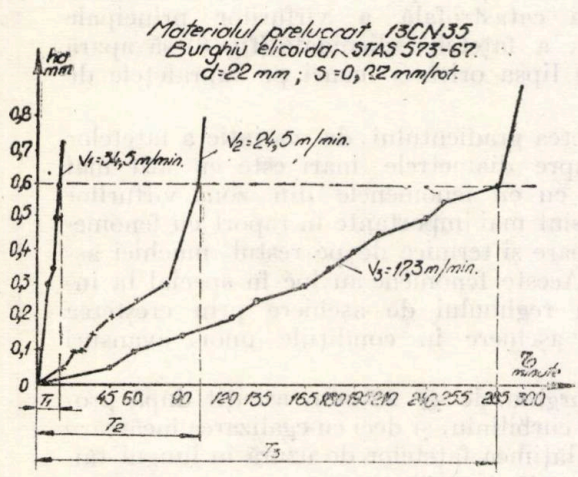



Fig. 1

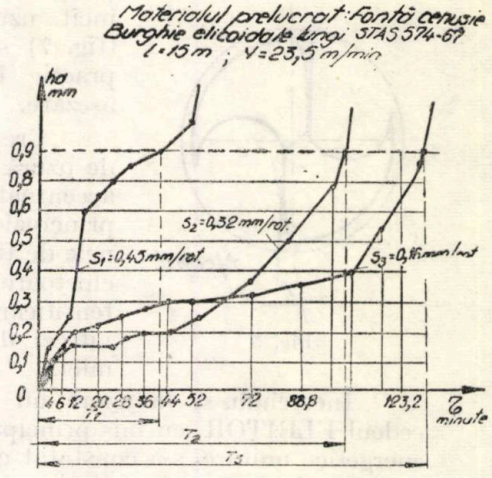



Fig. 2

Cu ajutorul familiilor de curbe $T = f(v)$, trasate în coordonate dublu-logaritmice, s-au determinat valorile exponentului $n$ din relația $v = C_v/T^n$, care s-au centralizat în tabelul 2.

**Tabelul 2**

| Materialul încercat | Diametrul burghiului în mm | Exponentul $n$ |
|---|---|---|
| 13CN35 | 10 | 0,45 |
| | 15 | 0,23 |
| | 17,5 | 0,23 |
| | 22 | 0,23 |
| OLK4 | 12 | 0,2 |
| | 19 | 0,15 |
| $F_c20$ | 4 | 0,3 |
| | 10 | 0,3 |
| | 15 | 0,22 |
| | 22 | 0,2 |

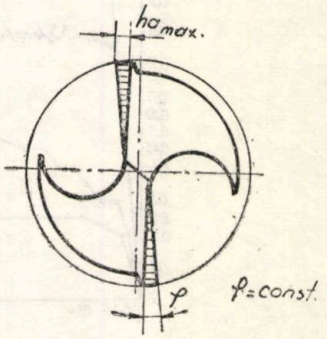



Fig. 3

Comparativ cu valorile menționate în literatura de specialitate [3]... ...[5], se constată că, pentru burghiele încercate, exponenții $n$ capătă în general valori mai mari și că, funcție de diametrul burghiului, limitele de variație sînt destul de largi.

Studiindu-se experimental forma fațetei de uzură de pe suprafețele de așezare s-a constatat că gradientul de creștere a uzurii suprafețelor de așezare spre diametrele mari poate fi constant (uzura suprafețelor având practic o formă triunghiulară, fig. 3 și 4), sau poate fi crescător (fig. 5 și 6). Această creștere poate fi atît de accentuată încît uzura catastrofală a vîrfurilor principale (fig. 7) sau a fațetelor elicoidale (fig. 8) să apară practic în lipsa oricărei uzuri pe suprafețele de așezare.

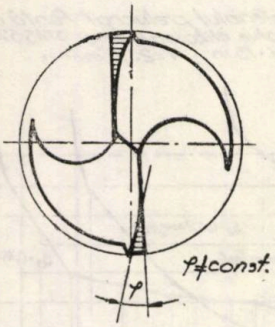


Fig. 5

Creșterea gradientului de variație a fațetelor de uzură spre diametrele mari este cu atît mai accentuată cu cît fenomenele din zona vîrfurilor principale sînt mai importante în raport cu fenomenele de frecare și termice de pe restul muchiei așchietoare. Aceste fenomene au loc în special la intensificarea regimului de așchiere prin creșterea vitezei de așchiere în condițiile unor avansuri mici.

Încercîndu-se la uzură un burghiu de ∅ 22 mm, ascuțit după procedeul ELBITOR, cu tăiș principal curbiliniu, și deci cu egalizarea încărcării energetice unitare, s-a constatat că lățimea fațetelor de uzură în lungul tăișurilor principale este practic constantă (fig. 9).

Din analiza curbelor de uzură s-a mai constatat că în unele cazuri, acestea au o formă obișnuită, prezentînd cele trei zone caracteristice: uzura inițială sau de rodaj, uzura stabilizată și uzura catastrofală (fig. 10), acea-

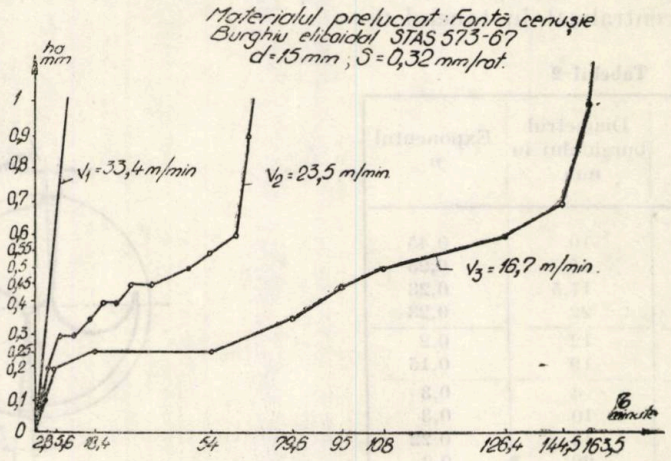


Fig. 10

sta în special la burghierea fontelor. La burghierea oțelurilor și în special la burghierea oțelurilor de rezistență sporită, prima parte a curbelor de uzură nu mai este distinctă (fig. 1), burghiul angajîndu-se chiar de la început într-o uzură continuă.

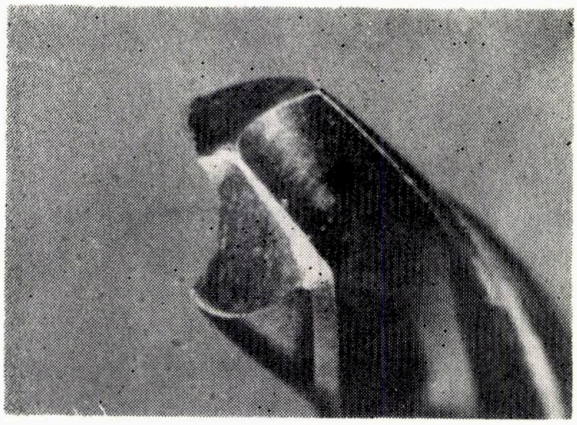


Fig. 4

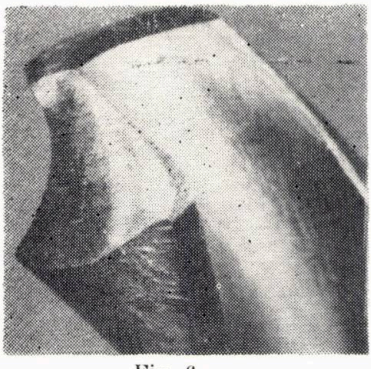


Fig. 6

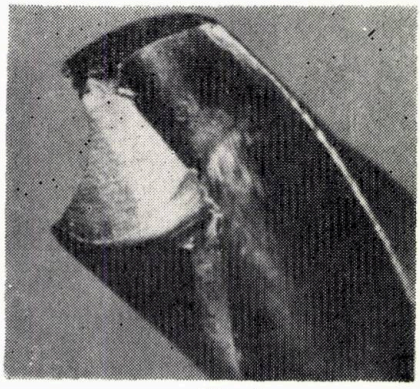


Fig. 7

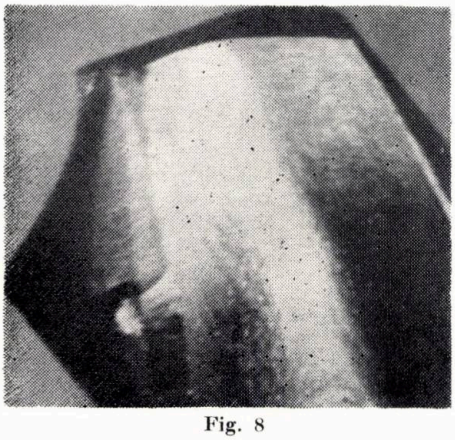


Fig. 8

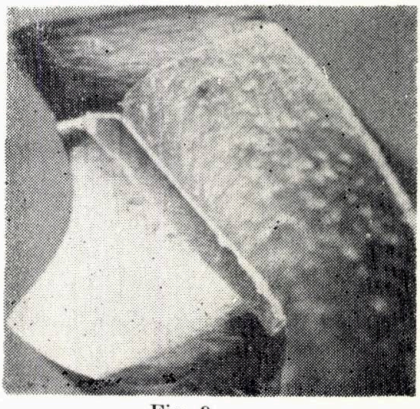


Fig. 9

Încercările comparative de uzură a burghielor ascuțite după procedeul ELBITOR [2] și după procedeele convenționale au dus la conlcuzia că noile mașini produse de I. M. Suceava asigură o durabilitate de 3—12 ori mai mare decît mașinile similare importate. Această creștere a durabilității se realizează, atît prin egalizarea încărcării energetice unitare, cît și prin mărirea unghiului de ascuțire a vîrfurilor principale și îmbunătățirea corespunzătoare a evacuării căldurii prin conducție.

În acest sens, la burghierea oțelului OLC 55, cu răcire și $v = 57{,}4$ m/min, iar $S = 0{,}11$ mm/rot, burghiul ascuțit după procedeul ELBITOR a avut o durabilitate de 7,75 ori mai mare decît același burghiu ascuțit după procedeul conic, varianta Bancroft-Washborne.

## 3. Concluzii

1. Uzura suprafețelor de așezare a burghielor este variabilă ca formă, prezentîndu-se de la o formă triunghiulară, cu un gradient de creștere constant, pînă la o formă cu un gradient de creștere spre diametrele mari din ce în ce mai accentuat, ajungîndu-se la situații cînd, fără o uzură măsurabilă a suprafețelor de așezare, uzura vîrfurilor principale sau a fațetelor elicoidale capătă valori catastrofale.

2. Curbele de uzură ale suprafețelor de așezare nu prezintă în toate cazurile cele trei porțiuni distincte; există situații, în special la burghierea oțelurilor, cînd uzura inițială (de rodaj) este insesizabilă.

3. Pantele curbelor de durabilitate $T = f_1(v)$ și $T = f_2(S)$ sînt variabile în limite destul de largi, obținîndu-se pentru burghiele încercate valori în general superioare celor indicate în literatură.

4. Ascuțirile realizate pe mașinile ELBITOR — Suceava asigură o uzură practic uniformă cu gradient nul în lungul tăișului principal, ceea ce determină o sporire a durabilității de 3—12 ori în raport cu ascuțirile elidoidale sau conice.

*Primită la 15 noiembrie 1975*

*Institutul politehnic, Iași,*
*Catedra de mașini unelte și scule*

## BIBLIOGRAFIE

1. Belous V., *Proiectarea sculelor. Bazele proiectării sculelor așchietoare.* Rotaprint, Inst. polit. Iași, 1969.
2. Belous V. ș. a., *Cercetări asupra durabilității și dinamicii așchierii burghielor ascuțite după procedeul ELBITOR față de a celor ascuțite conic.* Lucrări științifice, I. P. Galați, 5 (1972).
3. * * * *Tool Engineers. American Society of Tool and Manufacturing Engineers.* Mc. Graw-Hill, New York, 1959.
4. Лоладзе Т. Н., *Износ режущего инструмента.* Москва, 1958.
5. Ачеркан Н. С., *Справочник машиностроителя.* Том. 5, книга II, Москва, 1964.

## RECHERCHES SUR L'USURE ET LA DURABILITÉ DES FORÊTS HÉLICOÏDAUX

(Résumé)

Dans le travail on présent les résultats expérimentaux obtenus dans le Laboratoire de Machine-outils de l'institut polytechnique de Jassy concernant l'usure et la durabilité des forêts hélicoïdaux. On présent aussi les principales conclusions concernant les différentes formes d'usure du forêt hélicoïdal.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 62 1.94

# INSTALAREA SEMIFABRICATELOR DE RULMENȚI PENTRU STRUNJIREA EXTERIOARĂ

DE

I. CONDREA și GH. COMAN

## 1. Introducere

În lucrări prezentate aterior [1], [2], s-a demonstrat posibilitatea creșterii preciziei prelucrării mecanice prin rectificare a elementelor de rulmenți. Însă, această posibilitate era condiționată de provocarea prealabilă, la strunjire, a unui număr controlabil de ondulații pe suprafața de bazare. În această lucrare se va prezenta modul de provocare prealabilă a numărului dorit de ondulații pe suprafața de bazare pentru instalarea semifabricatelor la rectificare.

## 2. Bazarea semifabricatelor de rulmenți pentru strunjirea exterioară

Inelele de rulmenți fac parte din clasa discuri, cu un raport mic între lungimea pe generatoare $L$ și diametrul exterior al lor $D$ (fig. 1).

Pentru strunjirea lor exterioară, inelele de rulmenți se bazează pe suprafața interioară, care preia semifabricatului două grade de libertate, și o suprafață frontală, care preia semifabricatului trei grade de libertate, simbolizate în fig. 1 [3].

Dispozitivele destinate instalării semifabricatelor pentru strunjirea exterioară a elementelor de rulmenți, trebuie să asigure bazarea acestora, în conformitate cu schema de bazare din fig. 1.

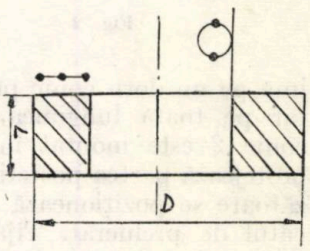



Fig. 1

## 3. Dispozitive pentru instalarea semifabricatelor de rulmenți la strunjirea exterioară

Pentru instalarea semifabricatelor de rulmenți, în vederea strunjirii, se folosește o gamă foarte variată de dispozitive, cu diferite soluții constructiv-funcționale, fiecare prezentînd anumite avantaje și desavantaje.

Însă, continuu se caută noi soluții constructiv-funcționale pentru dispozitivele destinate instalării semifabricatelor de rulmenți în vederea strunjirii, care să corespundă din ce în ce mai mult exigențelor creșterii în continuare a calității și economicității operațiilor tehnologice la strunjire a elementelor de rulmenți.

În ultimul timp, mai multe publicații de specialitate prezintă diferite noutăți în acest domeniu. Astfel, în fig. 2 se prezintă un dispozitiv realizat de firma „MP Tool & Engineering Co.", Mich. SUA (brevet SUA nr. 3.216.753), care funcționează în felul următor. Bucșa extensibilă *1* se spri-

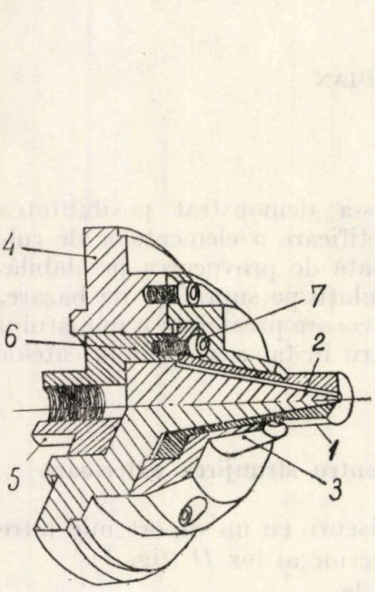



Fig. 2

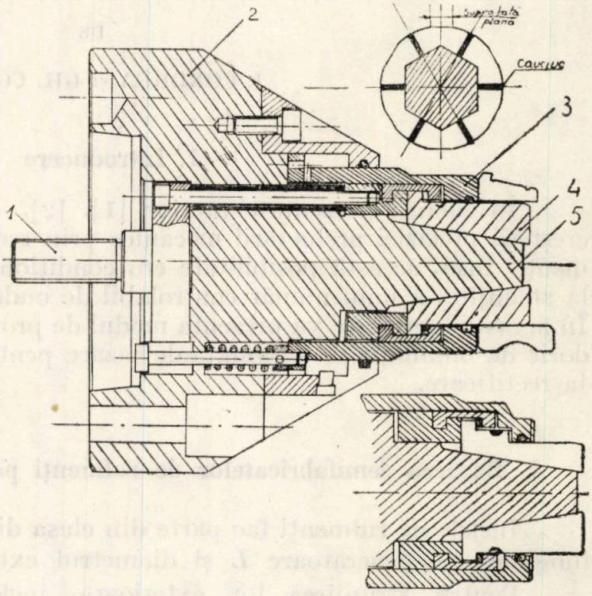



Fig. 3

jină pe un dorn conic plin *2*. Despicăturile sînt umplute cu cauciuc refractar pe toată lungimea, pentru împiedicarea pătrunderii așchiilor. Dornul conic *2* este montat în interiorul flanșei *4*, iar un capac de acoperire *3* protejează partea posterioară a bucșei extensibile *1*. La o distanță corespunzătoare se poziționează o suprafață frontală pe care se sprijină semifabricatul de prelucrat. Tija de acționare a bucșei extensibile se înșurubează într-o piesă intermediară *5* din care se degajă mai multe bucșe filetate *6* și șuruburile *7*, care ajung prin orificiile din flanșa de legătură pînă la flanșa bucșei extensibile, putînd fi astfel înșurubate între ele.

În poziție inițială, bucșa extensibilă se află în față și se sprijină pe con. După ce semifabricatul este poziționat, bucșa extensibilă se deplasează cu ajutorul tijei de tracțiune peste piesa intermediară în direcția arborelui principal. Pe măsură ce diametrul conului crește, segmenții bucșei extensibile se destind radial și se așează în alezajul piesei de prelucrat. Fața frontală a semifabricatului vine în contact cu capacul de acoperire *3*,

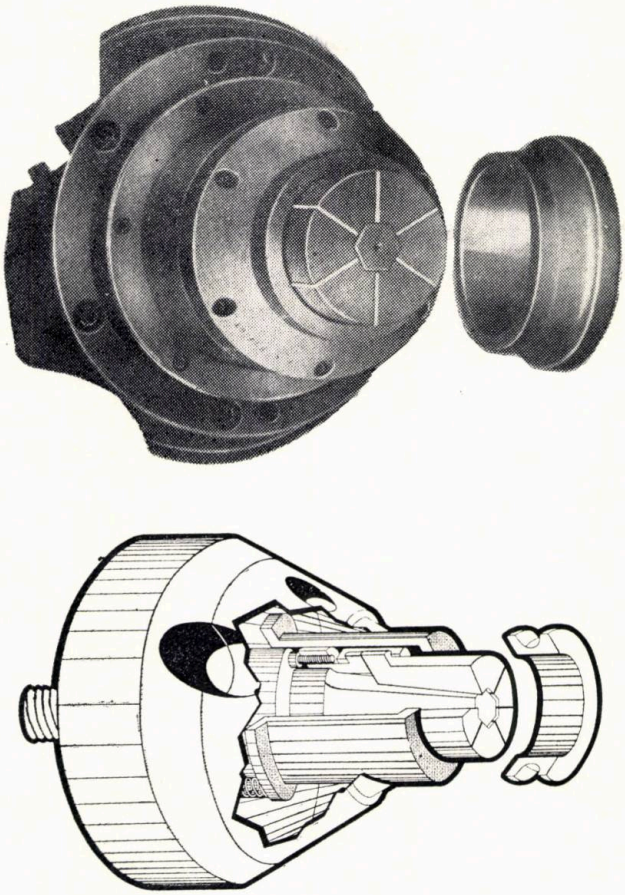


Fig. 4

fapt ce elimină necesitatea aplicării prealabile a forței de reglare [4] pentru tamponarea semifabricatului, în scopul obținerii unui contact corect a suprafeței frontale a acestuia cu suprafața frontală a capacului de acoperire *3*. În fig. 3 se prezintă construcția unui dispozitiv realizat de firma TOBLER S. A — Franța, a cărei vedere asamblată se poate observa în fig. 4. Dispozitivul se compune din următoarele părți principale: tija filetată *1*, corpul *2*, bucșa de sprijin *3*, bucșa elastică *4*, dornul conic *5* ce se degajă din corpul *2*.

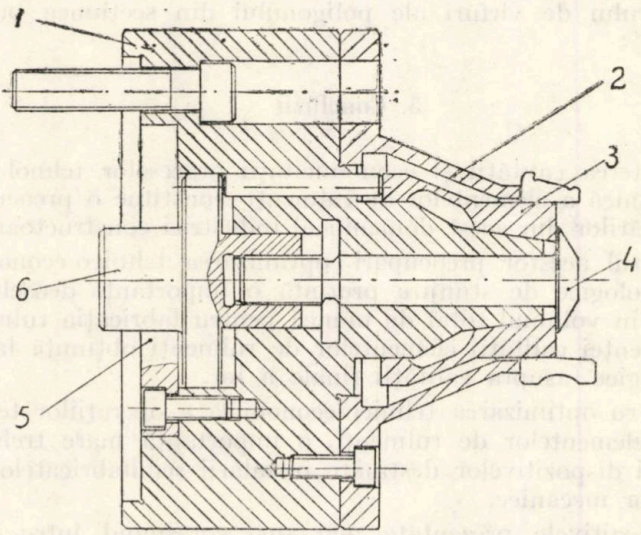



Fig. 5

În fig. 5 se prezintă construcția unui dispozitiv realizat la Întreprinderea de rulmenți Bîrlad, cu următoarele elemene principale: corpul *1*, bucșa de sprijin *2*, bucșa elastică *3*, tija *4*, flanșa *5*, bucșa filetată *6*.

Atît din fig. 3, cît și din fig. 5, rezultă simplu modul de funcționare a dispozitivelor respective.

## 4. Modul de obținere a numărului controlabil de ondulații pe suprafața de bazare a semifabricatelor pentru rectificare

După cum s-a arătat anterior [2], [5], rectificarea elementelor de rulmenți se face, în principal, după metoda rectificării fără centre cu bazarea semifabricatelor pe reazeme fixe, folosindu-se ca suprafețe de bazare suprafața cilindrică exterioară și o suprafață frontală a inelului respectiv. De asemenea, s-a demonstrat că în funcție de condițiile de reglaj a mașinilor de rectificat la dimensiunea de lucru [2], [6], există un număr optim de ondulații pe suprafața cilindrică exterioară a semifabricatului, care favorizează creșterea preciziei prelucrării mecanice prin rectificare a elementelor de rulmenți.

Numărul optim de ondulații pe suprafața cilindrică exterioară a semifabricatului pentru rectificare, se poate obține simplu, prin frezarea poligonală exterioară a bucșei elastice din dispozitivul destinat instalării semifabricatului respectiv la strunjire. Astfel, în timpul fixării semifabricatului la strunjire, forțele de fixare sînt dispuse pe un număr de generatoare, corespunzător numărului muchiilor poligonului format în secțiune de bucșa elastică. Sub acțiunea forțelor de fixare, semifabricatul se deformează elastic, se strunjește la o formă cilindrică exterioară corectă, iar după desprindere și deci relaxare, va căpăta forma poligonală cu un număr de vîrfuri corespunzător numărului de vîrfuri ale poligonului din secțiunea bucșei elastice.

## 5. Concluzii

1. Creșterea calității și economicității proceselor tehnologice de prelucrare mecanică a elementelor de rulmenți constitue o preocupare permanentă a lucrărilor din acest domeniu al industriei constructoare de mașini.

În cadrul acestor preocupări, optimizarea tehnico-economică a operațiilor tehnologice de stunjire prezintă o importanță deosebită, datorită ponderii lor în volumul total de muncă pentru fabricația rulmenților, precum și influenței calității elementelor de rulmenți obținută la aceste operații tehnologice, asupra calității finale a lor.

2. Pentru optimizarea tehnico-economică a operațiilor tehnologice de strunjire a elementelor de rulmenți, o importanță mare trebuie acordată perfecționării dispozitivelor destinate instalării semifabricatelor în vederea prelucrării lor mecanice.

3. Dispozitivele prezentate mai sus, corespund întru totul acestor cerințe pentru optimizarea tehnico-economică a operațiilor tehnologice de strunjire a elementelor de rulmenți. Astfel, se asigură o bazare corectă a semifabricatelor, prin efectuarea unui contact corect între suprafața frontală de bazare a semifabricatului cu suprafața frontală a bucșelor de sprijin, fără a se folosi mecanisme suplimentare care să dezvolte forța de reglare a acestora. Forța de reglare este dezvoltată de frecarea progresivă ce ia naștere între suprafața exterioară a bucșei elastice cu suprafața alezajului semifabricatului.

4. Instalarea semifabricatelor în vederea prelucrării mecanice se face foarte simplu. Astfel, urmărind pe fig. 3, se observă că după poziționarea semifabricatului pe bucșa elastică *4*, deplasarea tijei *1* spre stînga conduce la antrenarea, în aceeași direcție, a bucșei elastice *4*, care, fiind trasă pe dornul conic *5*, se destinde, producînd pe de o parte antrenarea semifabricatului spre stînga aducîndu-l în contact corect cu suprafața frontală a bucșei de sprijin *3*, iar pe de altă parte, centrarea și strîngerea radială a semifabricatului. După terminarea operației de strunjire, prin deplasarea tijei *1* spre dreapta, prin intermediul arcurilor elicoidale ce se observă pe desen, se deplasează și bucșa elastică *4* spre dreapta, obținîndu-se desprinderea piesei prelucrate.

5. Dispozitivele prezentate pot fi folosite şi la strunjirea altor piese din clasa discuri: roţi dinţate, roţi de curea, volanţi, etc.

*Primită la 30 decembrie 1975*

*Institutul politehnic, Iaşi,*
*Catedra de maşini unelte şi tehnologie*

## BIBLOGRAFIE

1. Coman Gh., *Transferul erorii de bazare la rectificarea interioară fără centre cu bazarea semifabricatelor pe reazeme fixe.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIX (XXIII), *1—2*, s. IV (1973).
2. Coman Gh., *Creşterea preciziei prelucrării mecanice prin rectificare a elementelor de rulmenţi.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XXI (XXV), *1—2*, s. IV (1975).
3. Brăgaru A., *Tratarea simbolică a corelaţiei mobilitate-grad în proiectarea schemelor de orientare a semifabricatelor la prelucrarea în dispozitive pe maşini-unelte.* În „Fiabilitatea în construcţia de maşini. Tehnologii moderne în construcţia de maşini". Rotaprint, Inst. polit. Iaşi, 1975, pp. 95—98.
4. Tache Voicu, *Contribuţii la studiul schemelor de fixare şi al forţelor care solicită ansamblul dispozitiv-piesă la prelucrarea pe maşini-unelte.* Teză de doctorat, Inst. polit. Bucureşti, 1972.
5. Coman Gh. ş. a., *Rectificarea fără centre cu bazarea semifabricatelor pe reazeme fixe.* Construcţia de maşini, *2—3* (1975).
6. Silion D. ş. a., *Reglarea la dimensiunea de lucru a maşinilor de rectificat elemente de rulmenţi.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XXI (XXV), *1—2*, s. IV (1975).
7. Waller J.A., *Un montage du tipe à mandrin expansible.* La Machine Moderne, *707* (1968).
8. * * * *Dehnodorn mit hoher Spannkraft.* Werkstatt und Betrieb, *9* (1969).
9. * * * *Mandrins expansibles à segments MAS.* Prospect TOBLER S. A., Franţa.

## L'ABLOCAGE DES DEMI-PRODUITS DE ROULEMENTS POUR LE TOURNAGE EXTÉRIEUR

(Résumé)

Dans [1] et [3] on a démontré la possibilité d'améliorer la précision d'usinage par rectification des éléments de roulements. Cette possibilité était conditionnée par la provocation préalable, pendant le tournage, d'un nombre controlable d'ondulations sur la surface d'appui.

Dans cette ouvrage on présente la méthode de provocation préalable d'un nombre désiré d'ondulations sur la surface d'appui pour l'instalation du demi-produit à la rectification. On donne quelques constructions nouvelles de dispositifs pour l'instalation du semi-produit pour tournage.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621.9

# AUSLEGUNG UND PRÜFUNG EINER VERSUCHSANLAGE FÜR DIE ANALYSE DES DYNAMISCHEN VERHALTENS DER BOHRMASCHINEN

VON

AL. RENER

## 1. Einführung

Das dynamische Verhalten einer Werkzeugmaschine dessen Kenntniss auch für die Stabilitätsberechnungen nötig ist, kann auf Grund der Antwortfrequenzkennwerte des elastischen Systems bei Erregung mit Kräften die im Betrieb auftretenden Störschwingungskräfte simuliert, erhalten werden [2], [3].

Die Auslegung einer Versuchsanlage für die dynamischen Untersuchungen der Bohrmaschinen erfolgt zweckmässig in Betrachtbeziehung der Wichtigkeit der achsialen Verschiebungen des Bohrers zusammen mit dem Tragwerk der Werkzeugmaschine auf die Stabilität des Bohrvorganges.

Diese Verschiebungen verändern die Spandicke und beeinflussen direkt das Funktionieren des dynamischen Systems als selbstschwingendes System, durch das Verändern der achsialen Bohrkraft, welche ihrerseits die Verschiebungen des Tragwerkes hervorruft.

Hier wurde eine Erregungsmethode mit sinusförmiger Kraft gewählt.

Die Versuchsanlage besteht aus folgenden Teilen : *a* — Schwingungserreger ; *b* — seine Energieeinspeisung ; *c* — Schwingungskraftgeber ; *d* — Schwingungsübertrager ; *e* — Mess- und Registrieranlage (eventuell Datenverarbeitungsanlage für die Kraft- und Wegsignale).

## 2. Anlagebeschreibung

Im Folgenden werden die Hauptkennwerte der Anlageteile der im Werkzeugmaschienenlabor des Polytechnischen Institutes aus Jassy vom Verfasser hergestellten Anlage angegeben.

a. *Der Sinus-Schwingungserreger 1* (Abb. 1) ist elektromagnetischer Bauart eigener Konstruktion des Verfassers [1]. Der Hauptvorteil dieses Erregers bezüglich anderer Bauarten ist das Erhalten einer statischen Tragwerksvorbelastungskomponente, die durch ein elastisches Zwischenglied

(Spiralfeder *2*), paralell mit den Tragwerksteilen die konstante Bohrkraft der untersuchten Struktur simuliert.

Die Daten bezüglich des Aufbaues des Erregers sind in [4] enthalten.

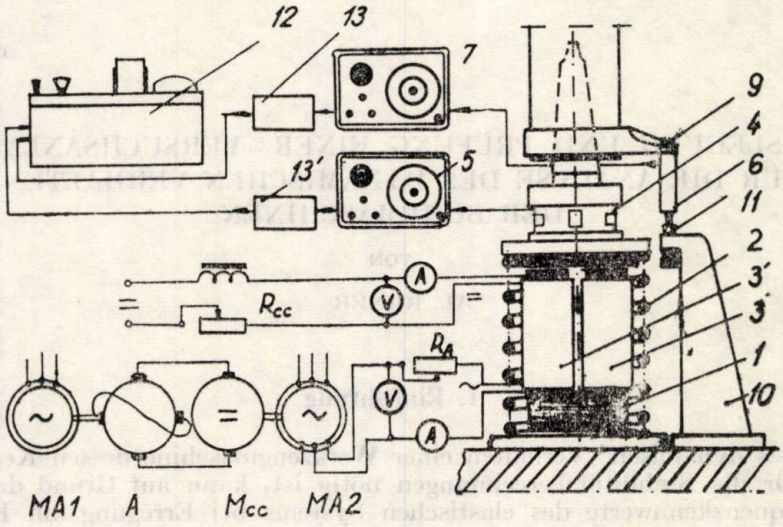



Abb. 1

Die Hauptkennwerte des Erregers sind: maximale statische Kraft, $F_{st\,max} = 3\,700$ N; maximale dynamische Kraft $F_{d\,max} = 200$ N; Frequenzbereich 0...400 Hz.

Der Erreger enthält zwei Spulen *3*, *3'*. Die optimale Funktion des Erregers ist mit der Vormagnetisierung durch Gleichstrom einer Spule verbunden. Die zweite Spule ist mit einer Wechselstromspannungsquelle veränderlicher Frequenz gespeisst.

b. *Die benützte Gleichspannungsquelle* war eine Akkumulatoren-batterie. Im Speisekreis der Gleichspannungsspule wurde eine Drosselspule, um den Einfluss der Stromschwankungen der Wechselspannungsspule auszuschalten, eingereiht.

Um im jeden Fall eine Leistungsreserve zu haben, wurde die veränderliche Wechselfrequenzquelle Abb. 1, durch die Betätigung mit veränderlicher Umdrehungszahl einer Asyncronmaschine mit bewickeltem Rotor MA 2, durch einen Gleichstrommotor $M_{cc}$ mit getrennter Erregung hergestellt. Seinerseits ist der Gleichstrommotor mit veränderlicher Spannung von einem Querfeldgenerator (Amplidyne A) gespeisst, der durch einen Dreiphasenasyncronmotor MA 1 angetrieben ist.

Der Block Asyncronmotor-Amplidyne ist ein Teil des elektrischen Antriebs der automatischen Revolverdrehbank Typ 1A136.

Durch die Veränderung der Gleichstrommotordrehzahl im Drehzahlbereich 0...1 500 U/Min., wechselseitig, erhielt man an den Schleifringen der Asyncronmaschine MA2 Wechselspannungen im Frequenzbereich 0... ...127,5 Hz.

Mit Hilfe dieser Maschinenkombination wurden Versuche ausgeführt um die optimalen Funktionskennwerte des Erregers zu erhalten. Die optimale Funktion des Erregers erhielt man für die Stromwerte:

$$I = 0{,}9 \text{ A} \quad I \sim = 1{,}5 \text{ A} \quad (50 \text{ Hz})$$

die durch die Rheostaten $R_A$ und $R_C$ geregelt wurden. Darauf, ohne die Rheostatstellung zu verändern, regelte man die Drehzahl des Asyncronmotors MA2, die durch ein Präzisionstachometer überwacht wurde, und erhielt die Spannungs- und Stromwerte aus dem Wechselspannungsspulenkreis des Erregers. Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 1 angegeben. Bezüglich dieser, kann man folgende Bemerkungen machen:

1° im Frequenzbereich von 10...117,5 Hz steigt die Spannung von 3 bis 170 V;

2° im gleichen Bereich ist der Stromanwachs wegen des Anwachsens des induktiven Blindwiderstandes mit der Frequenz gering.

**Tabelle 1**

| Nr. | $U$ n/Min | $f = 50 - \frac{3n}{60}$ Hz | $U$ V | $I$ A | $Z = \frac{U}{I}$ Ω |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 980 | 1 | 0 | 0 | |
| 2 | 920 | 4 | 1 | 0,5 | 2,0 |
| 3 | 800 | 10 | 3 | 1,1 | 2,7 |
| 4 | 710 | 14,5 | 4 | 1,3 | 3,1 |
| 5 | 600 | 20 | 4 | 1,3 | 3,1 |
| 6 | 480 | 26 | 7 | 1,4 | 5,0 |
| 7 | 450 | 27,5 | 35 | 1,35 | 26,0 |
| 8 | 375 | 31,25 | 40 | 1,45 | 27,6 |
| 9 | 275 | 36,3 | 43 | 1,5 | 28,7 |
| 10 | 210 | 39,5 | 55 | 1,5 | 36,7 |
| 11 | 0 | 50 | 70 | 1,5 | 46,7 |
| 12 | − 70 | 53,5 | 78 | 1,5 | 52 |
| 13 | − 110 | 55,5 | 80 | 1,5 | 53,3 |
| 14 | − 155 | 57,5 | 84 | 1,5 | 56 |
| 15 | − 235 | 62,75 | 92 | 1,55 | 59,3 |
| 16 | − 335 | 66,75 | 97 | 1,55 | 62,6 |
| 17 | − 415 | 70,75 | 103 | 1,57 | 65,6 |
| 18 | − 440 | 72 | 110 | 1,57 | 70,1 |
| 19 | − 570 | 78,5 | 128 | 1,75 | 73,1 |
| 20 | − 840 | 92 | 135 | 1,80 | 75 |
| 21 | − 940 | 97 | 140 | 1,80 | 77,8 |
| 22 | − 1 060 | 103 | 145 | 1,85 | 78,4 |
| 23 | − 1 100 | 105 | 145 | 1,85 | 78,4 |
| 24 | − 1 240 | 112 | 150 | 1,85 | 81,1 |
| 25 | − 1 400 | 120 | 155 | 1,86 | 83,3 |
| 26 | − 1 550 | 127,5 | 170 | 1,90 | 88 |

Das Ergebniss dieses Verhaltens des elektrischen Kreises ist das Beibehalten der veränderlichen Kraft des Erregers in zweckmässigen Grenzen entsprechend des Strommittelwertes $I \sim = 1{,}5$ A (für 50 Hz), der in der Berechnung des Erregers angenommen wurde.

c. *Der Schwingungskraftgeber*. *4* ist in [4] gleichzeitig mit dem Aufbau des Erregers angegeben. Dessen Geber ist mit Dehungsmeßstreifen ausgeführt. Er wird mit einer Dehungsmeßbrücke Typ ORION 2353 benützt. Die Ablesegenauigkeit ist 10,4 daN/Teilstrich der Dehnungsmeßbrücke.

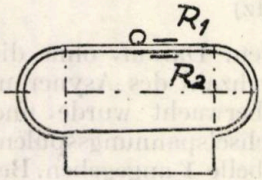


Abb. 2

d. *Die Messung* der relativen Verschiebungen (Schwingungen) des elastischen Systems zwischen der Hauptspindel und dem Maschinetisch erfolgte mit einem Wegmesser *6* Abb. 1, der die Form eines krummen Stabes, Abb. 2, hat. Dieser wurde vom Verfasser entworfen und hergestellt. Der Geber des Wegmessers ist ebenfalls mit Dehnungsmeßstreifen (Halbbrückenschaltung) und an die Dehnungsmeßbrücke *7* ORION 2353 angeschlossen [5].

Der Geber wurde durch ein Zwischenstück *9* an der Hauptspindel der Bohrmaschine befestigt. Eine Mikrometerschraube *11* durch eine steife Unterlage *10* am Maschientisch befestigt, ermöglicht eine Vorverformung des Gebers, sowie auch die Kontrolle der Reglung in jedem Moment.

Die Einreglung des Wegmessers führte zur Bestimmung einer Genauigkeit von 3,1 um/Teilstrich der Dehungsmeßbrücke und einer Eigenfrequenz $f_{pr} = 1\,350$ Hz.

e. *Die Datenregistrierung* erfolgte mit Hilfe eines Schleifoszillographen *12* Typ GG 112 RFT, der an die Dehnungsmeßbrücken durch transistorisierte, ebenfalls im obengenannten Labor ausgeführten, Impedanzzusatzgeräte *13*, *13'* angeschlossen wurde.

Die Meßschleifen für die Kraft- und Wegsignale sind des Typs MST 3 mit folgenden Kennwerten: 0,84 mm/mA, $R = 1{,}6$ Ohm, $f_{pr} = 840$ Hz.

## 3. Experimentelle Ergebnisse

1. Für die Prüfung der Funktion der Anlage, deren Teile beschrieben wurden, erfolgten Versuche mit der rumänischen Bohrmaschine G 40.

2. Zwischen der Hauptspindel der Bohrmaschine und ihres Tisches erfolgte eine statische Vorbelastung $F_{st} = 310$ daN, durch die Verformung der Spiralfeder und der Vormagnetisierung des elektromagnetischen Erregers.

3. Der Wegmesser wurde mit Hilfe der Mikrometerschraube mit 0,25 mm vorgespannt. Nach dem Ausgleich der Dehnungsmeßbrücken und Reglung des Lichtflecks, erfolgte die Einreglung der dynamischen Signale und nachher die Versuchsausführung bezüglich des dynamischen Verhaltens der Bohrmaschine G 40. Auszugsweise sind Registrierungen in Abb. 3 wiedergegeben.

4. Die Oszillogramme ermöglichen die Bestimmung der Amplitude der Erregerkraft sowie auch der Schwingungen, die Frequenz beider Kenngrößen und deren Phasenverschiebung. Mit diesen Kenngrößen kann man die Ortskurven des elastischen Systems der untersuchten Maschine aufzeichnen.

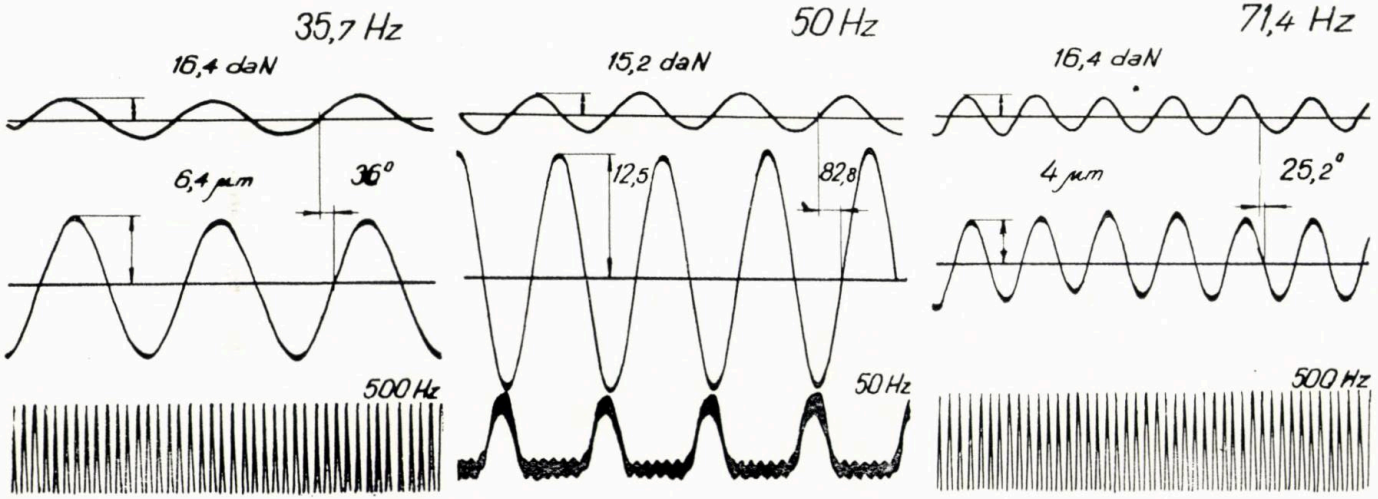

35,7 Hz
16,4 daN
6,4 μm
36°
500 Hz
50 Hz
15,2 daN
12,5
82,8
50 Hz
71,4 Hz
16,4 daN
4 μm
25,2°
500 Hz

Abb. 3

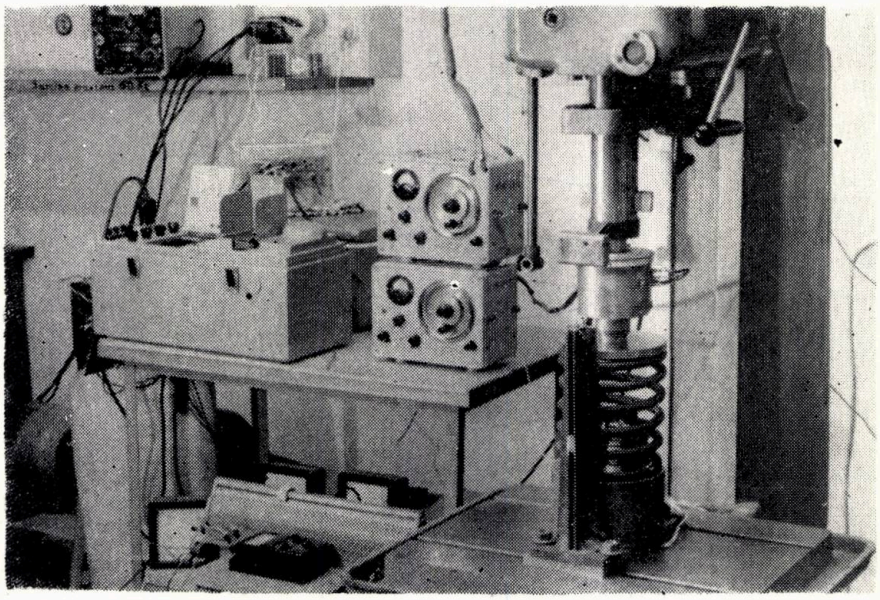


Abb. 4

5. Man kann direkt die Ortskurven durch Anwendung spezieller Apparate der Datenverarbeitung mit $X-Y$ Schreiber Ausgang erhalten.

Die Gesamtansicht der Anlage ist aus Abb. 4 ersichtlich.

*Eingegangen am 13. Oktober 1975*

*Technische Hochschule Jassy,*
*Lehrstuhl für Werkzeugmaschinen,*
*Werkzeuge und Technologie der Metalle*

## LITERATURVERZEICHNIS

1. Rener A., *Excitator de vibrații electromagnetic.* Dosar OSIM nr. 70.271/25.03, 1972.
2. Koenigsberger F., Tlusty J., *Machine Tool Structures.* Pergamon Press, Oxford, 1970.
3. Kudinov V. A., *Dinamica mașinilor unelte* (trad. din l. rusă). Ed. tehn., Buc., 1970.
4. Rener A., *Generator electromagnetic de vibrații.* Lucrările sesiunii științifice „Fiabilitatea în construcția de mașini", 31 oct. — 2 nov. 1975.
5. Buzdugan Gh., Blumenfeld M., *Tensometrie electrică rezistivă.* Ed. Tehn., Buc., 1966.

## ELABORAREA ȘI EXPERIMENTAREA UNUI STAND PENTRU ANALIZA COMPORTĂRII DINAMICE A MAȘINILOR DE GĂURIT

(Rezumat)

Se prezintă construcția unui stand pentru încercarea comportării dinamice a mașinilor de găurit, care are ca element central excitatorul de vibrații electromagnetic, de construcție originală. Sînt indicate caracteristicile de bază ale elementelor componente ale standului și cîteva determinări efectuate pe mașina de găurit românească G 40.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.92

# PRINCIPII CONSTRUCTIV-FUNCȚIONALE PENTRU UNIFICAREA ECHIPAMENTULUI TEHNOLOGIC AL MAȘINILOR DE RECTIFICAT ELEMENTE DE RULMENȚI

DE

GH. COMAN

## 1. Introducere

Creșterea calității rulmenților fabricați se obține în procesul de producție. De aceea, perfecționarea proceselor tehnologice de fabricație a acestora, în toate etapele procesului de producție, prezintă o mare importanță pentru creșterea calității prelucrării mecanice a rulmenților. O atenție deosebită se acordă perfecționării metodelor de rectificare a elementelor de rulmenți, dat fiind ponderea mare a volumului de muncă la rectificare în volumul total de muncă pentru prelucrarea mecanică a rulmenților, precum și poziției finale a operațiilor tehnologice de rectificare, cu influență hotăritoare asupra calității rulmenților fabricați.

Pe baza cercetărilor teoretice întreprinse și prezentate anterior de autor [1], [2], s-a căutat materializarea concluziilor respective, pentru unificarea echipamentului tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat fără centre cu bazarea semifabricatelor pe reazeme fixe, existente la Întreprinderea de rulmenți Bîrlad, în concordanță cu cerințele creșterii preciziei de prelucrare prin rectificare a elementelor de rulmenți.

## 2. Analiza critică a schemelor de bazare folosite pentru proiectarea inițială a echipamentului tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat

În vederea stabilirii principiilor constructiv-funcționale, pentru unificarea echipamentului tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat fără centre cu bazarea semifabricatelor pe reazeme fixe, s-a efectuat, la început, o analiză critică a schemelor de bazare folosite la proiectarea inițială a echipamentului tehnologic. Schematic, acestea sînt prezentate în fig. 1.

În fig. 2 se prezintă modul de materializare a schemei de bazare din fig. 1 *a* la proiectarea inițială a echipamentului tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat JUNG EK 10, în fig. 3 se prezintă modul de materializare a schemei de bazare din fig. 1 *b* la proiectarea inițială a echipamentului tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat NOVA, iar în fig. 4 se prezintă modul de materializare a schemei de bazare din fig. 1 *c* la proiec-

tarea inițială a echipamentului tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat FORTUNA AFCC 350 A.

Analiza acestor scheme de bazare a condus la următoarele constatări:

a) reglarea fixă a unghiurilor de poziție pentru papucii de susținere, $\alpha = 90°$ și $\beta = 10°...15°$. Acest reglaj face ca erorile de formă de pe suprafața de bazare să se copie integral și la același ordin de mărime pe suprafața prelucrată;

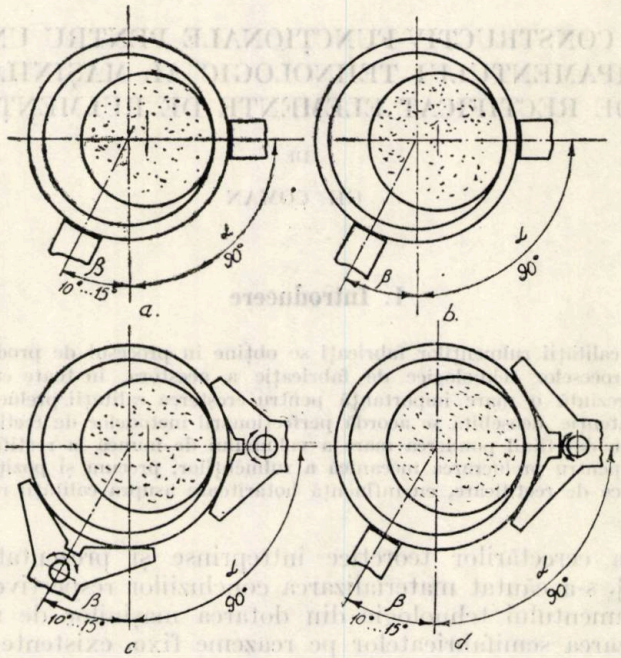



Fig. 1. — Scheme de bazare pentru instalarea semifabricatelor existente anterior cercetărilor efectuate.

b) dificultățile de realizare a suprafețelor circulare a papucilor de susținere, a căror rază de curbură trebuie să coincidă cu raza de curbură a suprafeței de bazare a inelului de rectificat și centrul razei de curbură cu centrul razei de rotație al inelului de rectificat (fig. 1 *a*, fig. 1 *b*);

c) necesitatea schimbării papucilor de susținere, sau rectificarea lor, la trecerea de la rectificarea inelelor cu un diametru nominal la rectificarea inelelor cu alt diametru nominal (fig. 1 *a*, fig. 1 *b*);

d) existența jocului dintre bolțuri și papuci ca sursă de erori de prelucrare mecanică (fig. 1 *c*, fig. 1 *d*);

e) existența vibrațiilor în zona de așchiere cauzate de oscilațiile papucilor de susținere pe bolțuri (fig. 1 *c*, fig. 1 *d*).

Aceste constatări au determinat ca schemele de bazare din fig. 1 să nu fie luate în considerare la stabilirea principiilor constructiv-funcționale de unificare a echipamentului tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat elemente de rulmenți.

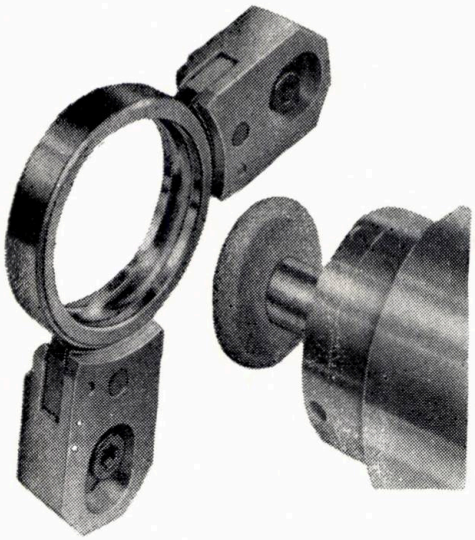


Fig. 2.— Soluții constructiv-funcționale pentru echipamentul tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat JUNG EK 10.

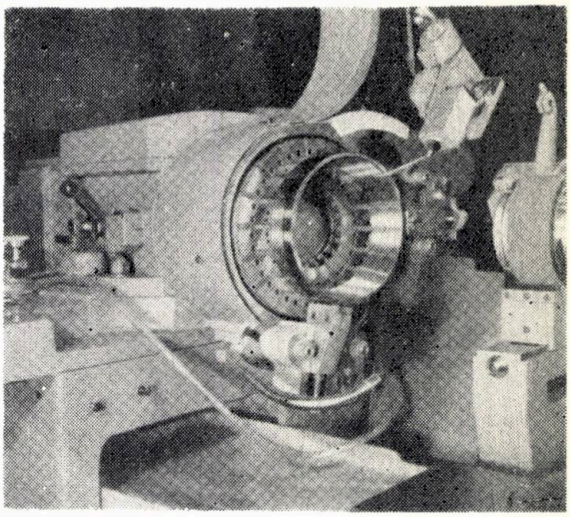


Fig. 3. — Soluții constructiv-funcționale pentru echipamentul tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat NOVA.

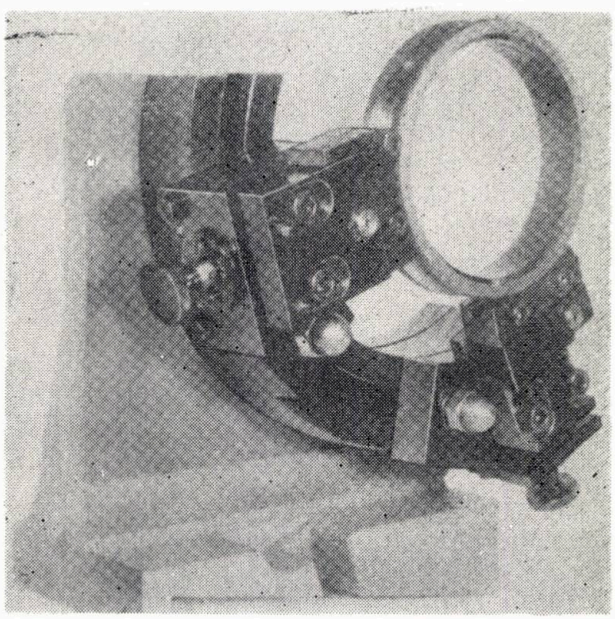


Fig. 4. — Soluții constructiv-funcționale pentru echipamentul tehnologic din dotarea mașinilor de rectificat FORTUNA AFCC 35 OA.

## 3. Soluții constructiv-funcționale pentru unificarea echipamentului tehnologic

În urma analizei critice a schemelor de bazare ale soluțiilor constructiv-funcționale pentru echipamentul tehnologic existent în dotarea mașinilor de rectificat respective și a studiilor teoretice întreprinse și prezentate anterior [1], [2], a fost elaborată o schemă de bazare unică și originală, care să permită unificarea echipamentului tehnologic al mașnilor de rectificat, existente în IRB, indiferent de proveniența acestora, și care să asigure, în același timp, reglarea mașinilor de rectificat la condițiile de lucru în conformitate cu cerințele creșterii preciziei de prelucrare (fig. 5).

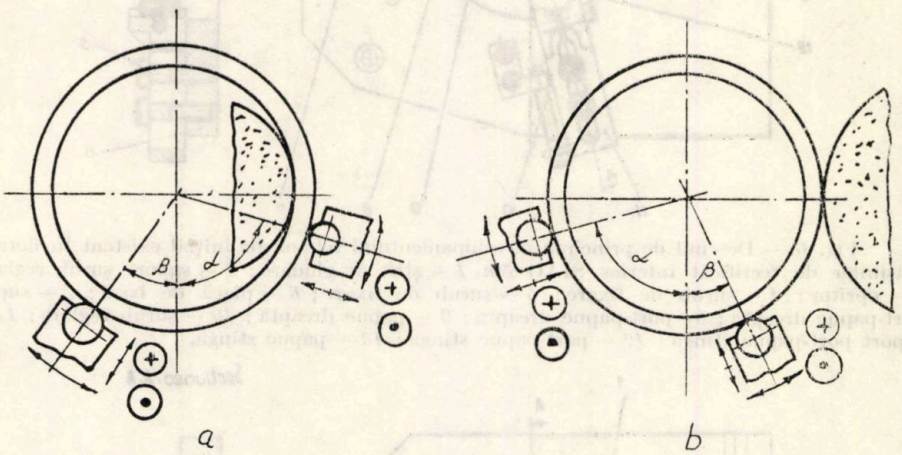



Fig. 5. — Scheme de bazare și reglaj adoptate pentru unificarea echipamentului tehnologic al mașinilor de rectificat interior (*a*) și exterior (*b*).

Din fig. 5 se observă că cele două scheme de bazare, pentru rectificarea interioară și pentru rectificarea exterioară, sînt similare, fiind diferențiate numai de inversarea unghiurilor de reglaj $\alpha$ și $\beta$.

Aceste scheme de bazare se disting prin următoarele particularități:

a) posibilitatea deplasării axiale și radiale a reazemelor fixe, ceea ce permite reglarea acestora corespunzător întregii game dimensionale de elemente de rulmenți ce se pot prelucra pe mașinile de rectificat respective;

b) posibilitatea deplasării tangențiale a reazemelor fixe, ceea ce permite reglarea mărimii unghiurilor $\alpha$ și $\beta$ corespunzător reducerii raportului de transfer al erorii de bazare pe suprafața prelucrată, în concordanță cu principiile prezentate anterior [1], [2];

c) forma cilindrică a papucilor de susținere, ceea ce asigură o realizare simplă a lor și un contact liniar corect cu suprafața de bazare a semifabricatelor, indiferent de dimensiunile acestora.

Luîndu-se în considerare aceste scheme de bazare, au fost elaborate soluții constructiv-funcționale pentru unificarea echipamentului tehnologic de la toate mașinile de rectificat fără centre cu bazarea semifabricatelor pe reazeme fixe, existente la IRB.

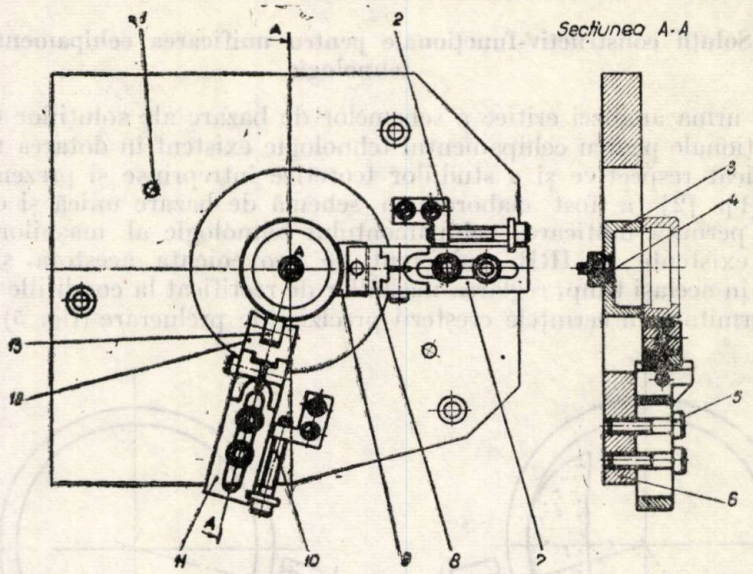



Fig. 6. — Desenul de principiu al echipamentului tehnologic inițial existent în dotarea mașinilor de rectificat interior SIAG 50: *1* — știft de ghidare; *2* — suport șurub reglare; *3* — opritor; *4* — șurub de fixare; *5* — șurub de fixare; *6* — placă de bază; *7* — suport port-papuc dreapta; *8* — port-papuc dreapta; *9* — papuc dreapta; *10* — șurub reglare; *11* — suport port-papuc stînga; *12* — port-papuc stînga; *13* — papuc stînga.

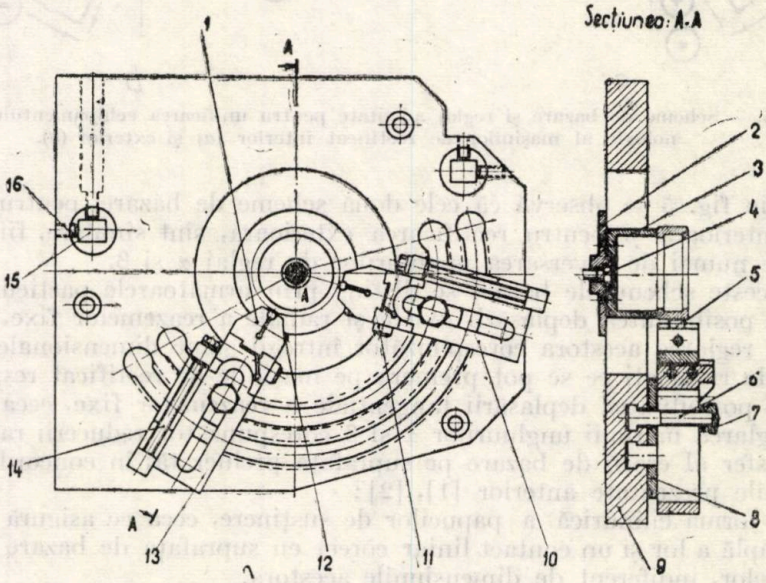



Fig. 7. — Desenul de principiu al echipamentului tehnologic unificat pentru mașinile de rectificat interior SIAG 50: *1* — port-papuc stînga; *2* — placă opritor; *3* — opritor; *4* — șurub fixare; *5* — papuc; *6* — șurub fixare; *7* — piuliță exagonală; *8* — placă antimagnetică; *9* — placă de bază; *10* — suport port-papuc dreapta; *11, 12* — șuruburi de fixare; *13* — suport port-papuc stînga; *14* — șurub reglaj; *15* — adaos pentru orientarea plăcii de bază; *16* — șurub reglaj.

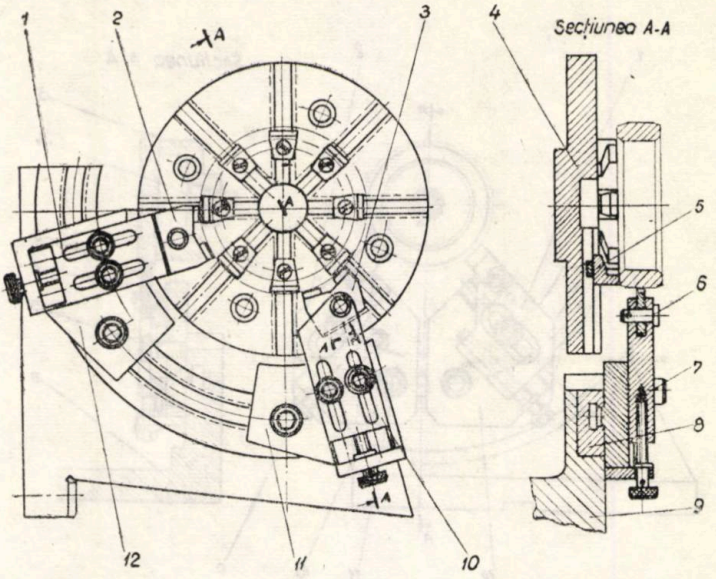



Fig. 8. — Desenul de principiu al echipamentului tehnologic inițial existent în dotarea mașinilor de rectificat exterior FORTUNA AFCC 350 A: *1* — suport port-papuc stînga; *2* — port-papuc stînga; *3* — port-papuc dreapta; *4* — platou; *5* — opritor; *6* — bolț; *7* — șurub fixare; *8* — placă de bază; *9* — carcasă; *10* — suport port-papuc dreapta; *11*, *12* — plăci suporți port-papuci.

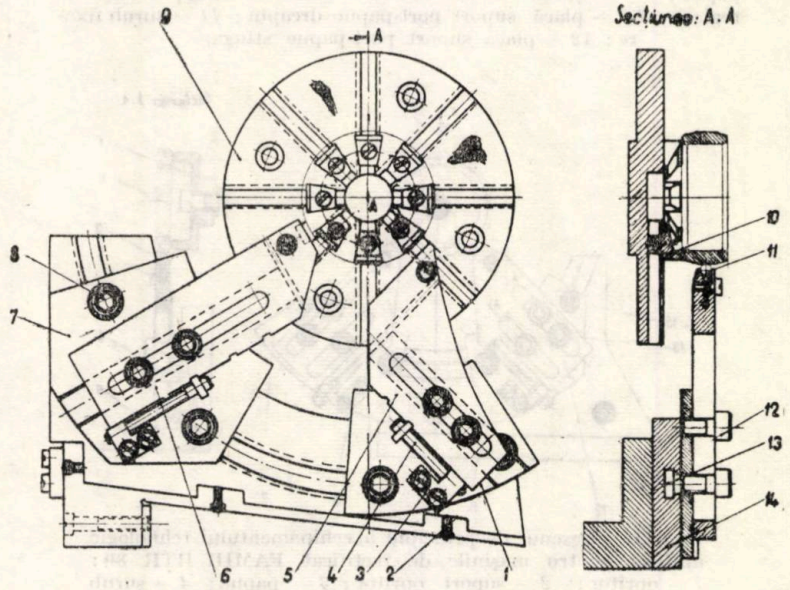



Fig. 9. — Desenul de principiu al echipamentului tehnologic unificat pentru mașinile de rectificat exterior FORTUNA AFCC 350 A: *1* — placă suport port-papuc dreapta; *2* — șurub reglare; *3* — suport șurub reglare; *4* — șurub reglare; *5* — suport port-papuc dreapta; *6* — suport port-papuc stînga; *7* — șurub fixare; *8* — placă suport port-papuc stînga; *9* — platou; *10* — opritor; *11* — papuc; *12* — șurub fixare; *13* — șurub fixare; *14* — placă de bază.

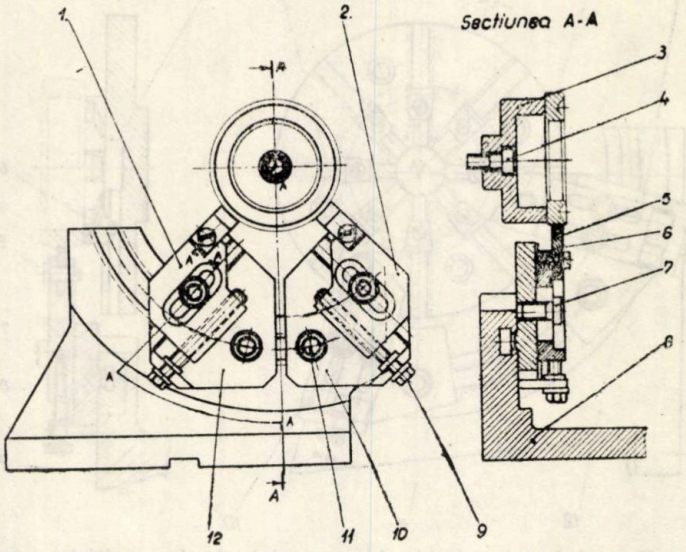



Fig. 10. — Desenul de principiu al echipamentului tehnologic iniţial existent în dotarea maşinilor de rectificat frontal FAMIR RTR 80 : *1* — suport port-papuc stînga ; *2* — suport port-papuc dreapta ; *3* — opritor ; *4* — şurub fixare ; *5* — papuc ; *6* — port-papuc ; *7* — şurub de fixare ; *8* — placă de bază ; *9* — şurub reglare ; *10* — placă suport port-papuc dreapta ; *11* — şurub fixare ; *12* — placă suport port-papuc stînga.

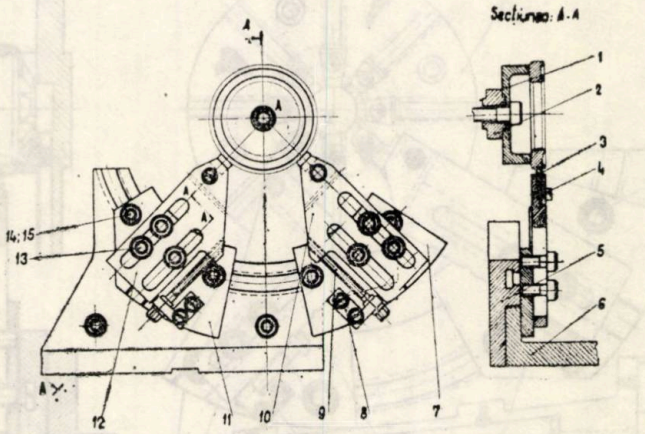



Fig. 11. —Desenul de principiu al echipamentului tehnologic unificat pentru maşinile de rectificat FAMIR RTR 80 : *1* — opritor ; *2* — suport opritor ; *3* — papuc ; *4* — şurub fixare ; *5* — placă de bază ; *6* — carcasă ; *7* —placă suport port-papuc dreapta ; *8* — suport şurub reglare ; *9* — şurub reglare ; *10* —port-papuc dreapta ; *11* — placă suport port-papuc stînga ; *12* —port-papuc stînga ; *13, 14, 15* —şuruburi de fixare.

Astfel, în fig. 6 se prezintă desenul de principiu al echipamentului tehnologic inițial din dotarea mașinilor de rectificat interior tip SIAG 50, iar în fig. 7 se prezintă desenul de principiu al echipamentului tehnologic unificat din dotarea aceloraşi mașini de rectificat. În fig. 8 se prezintă desenul de principiu al echipamentului tehnologic inițial, iar în fig. 9 desenul de principiu al echipamentului tehnologic unificat destinat mașinilor de rectificat exterior FORTUNA, tip AFCC 350 A. În fig. 10 se prezintă desenul de principiu al echipamentului tehnologic inițial, iar în fig. 11 desenul de principiu al echipamentului tehnologic unificat destinat mașinilor de rectificat frontal FAMIR, tip RTR 80.

Din fig. 9 rezultă că au fost efectuate încercări privind şi contactul punctual între suprafețele de bazare şi papucii de susținere, iar din fig. 11 rezultă că au fost experimentate şi soluții privind contactul liniar între suprafața cilindrică de bazare a inelelor de rectificat şi suprafața plană a papucilor de susținere. Contactul liniar dintre suprafața de bazare şi suprafața papucilor (cilindrică sau plană) au dat rezultatele cele mai bune.

*Primită la 1 octombrie 1975*

*Institutul politehnic, Iaşi,*
*Catedra de tehnologia construcției de mașini*
*şi mecanică agricolă*

## BIBLIOGRAFIE

1. Coman Gh., *Transferul erorii de bazare la rectificarea interioară fără centre cu bazarea semifabricatelor pe reazeme fixe.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIX (XXIII), *1—2*, s. IV (1973).
2. Coman Gh., *Creşterea preciziei prelucrării mecanice prin rectificare a elementelor de rulmenți.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XX (XXIV), *3—4*, s. IV (1974).

## THE CONSTRUCTIV-FUNCTIONAL PRINCIPLES FOR THE UNIFICATION OF THE TECHNOLOGICAL EQUIPMENT ON THE GRINDING MACHINES OF THE BEARING ELEMENTS

(Summary)

In [1], [2], the author established, on the theoretical way, the possibilities of improving. the mechanical machining accuracy in the grinding of the bearing elements.

In this work, the author establishes the practical posibilities to improve the mechanical machining accuracy in the grinding of the bearing elements, as well as the unification of the devices incorpored in the grinding machines of the bearing elements.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.9.01

# CONTRIBUȚII PRIVIND PROIECTAREA SUBANSAMBLULUI ARBORE PRINCIPAL AL MAȘINILOR-UNELTE AVÎND ÎN VEDERE COMPORTAREA SA LA SOLICITĂRI STATICE

DE

GH. CAȘLER și D. ZETU

La prelucrarea mecanică a unei piese pe o mașină-unealtă, asupra preciziei dimensionale și de formă a suprafeței prelucrate are influență deosebită rigiditatea statică a subansamblului arbore principal. Acesta poartă fie semifabricatul, fie scula aşchietoare, realizînd una dintre mișcările de generare a suprafeței prelucrate. Se impune, deci, ca la proiectarea subansamblului arbore principal să dispunem de date suficiente privind legăturile dintre mărimile care caracterizează subansamblul: distanța dintre lagăre, rigiditatea lagărelor, diametrul arborelui și al găurii din el și lungimea în consolă a arborelui, pe de o parte, și deformațiile statice ce se produc, pe de altă parte. Stabilirea unor asemenea legături se poate realiza pe calea calculelor sau prin cercetări experimentale efectuate pe modele sau pe mașina prototip.

În lucrare sînt prezentate rezultatele cercetărilor teoretice efectuate de autori asupra comportării statice a subansamblului arbore principal de la strungurile normale fabricate la Uzina „Strungul" Arad, care au ca scop deducerea relațiilor pentru calculul deformației statice și a rigidității statice raportate la capătul în consolă al arborelui și de a obține date necesare proiectării optime a construcției și raporturilor de montare ale subansamblului. Construcția schematizată a subansamblului menționat și schema de calcul sînt prezentate în fig. 1. În elaborarea schemei de calcul, se consideră momentul de inerție al secțiunii arborelui constant, iar forța de încărcare $F$ aplicată în punctul situat la capătul consolei arborelui principal. Neglijarea forței ce provine de la roata de acționare a arborelui în elaborarea schemei de calcul este justificată de calculele de optimizare prezentate la sfîrșitul lucrării.

Săgeata globală $f$ în punctul de acțiune a forței $F$ este dată de suma a două componente: $f_1$, determinată de elasticitatea proprie a arborelui principal și $f_2$, care se datorește elasticității lagărelor. Pentru săgeata $f$ s-a dedus relația:

$$(1) \qquad f = f_1 + f_2 = \frac{F}{3EI} a^3 \left(1 + \frac{l}{a}\right) + \frac{F}{C_A}\left(\frac{a+l}{l}\right)^2 + \frac{F}{C_B}\left(\frac{a}{l}\right)^2,$$

în care $E$ — modulul de elasticitate al materialului arborelui; $I$ — momentul de inerție al secțiunii arborelui; $C_A$, $C_B$ — rigiditățile lagărelor $A$ și $B$.

Folosind (1) se poate scrie relația rigidității statice a subansamblului:

$$R = \frac{F}{f} = \left[ \frac{a^3}{3EI}\left(1 + \frac{l}{a}\right) + \frac{1}{C_A}\left(\frac{a+l}{l}\right)^2 + \frac{1}{C_B}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]^{-1}. \tag{2}$$

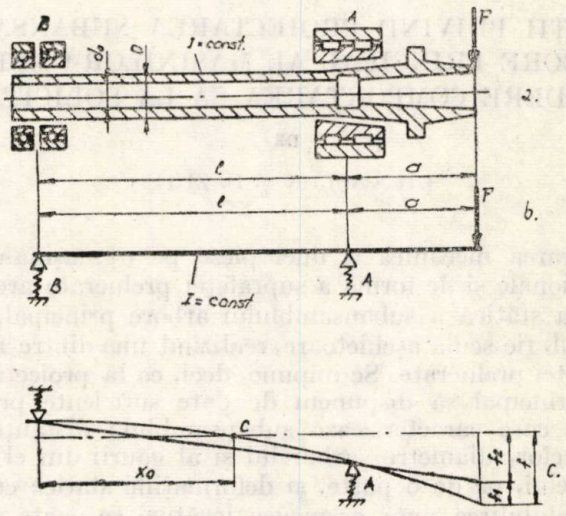



Fig. 1

Pentru optimizarea construcției subansamblului arbore principal, s-a procedat astfel: se consideră că principalul parametru constructiv al subansamblului este distanța dintre lagăre, a cărei valoare optimă se stabilește din condiția că săgeata $f$ la capătul arborelui să fie minimă. Astfel, se anulează prima derivată în raport cu $l$ a relației (1) și se obține, după transformări, o ecuație de gradul trei incompletă, de forma $l^3 + pl + q = 0$. Soluția reală a acestei ecuații se calculează cu formula lui Cardan și ea constituie distanța optimă dintre lagăre căutată:

$$l_{opt} = \sqrt[3]{2{,}9\,10^5 \frac{D^4}{C_A}(1+K) + \sqrt{8{,}4\,10^{10}\frac{D^8}{C_A^2}(1+K)^2 - 7{,}2\,10^{15}\frac{D^{12}}{C_A^3 a^3}}} + \tag{3}$$
$$+ \sqrt[3]{2{,}9\,10^5 \frac{D^4}{C_A}(1+K) - \sqrt{8{,}4\,10^{10}\frac{D^8}{C_A^2}(1+K)^2 - 7{,}2\,10^{15}\frac{D^{12}}{C_A^3 a^3}}}.$$

Introducînd $l = l_{opt}$ în relația (2), vom obține rigiditatea maximă, deoarece $l_{opt}$ corespunde săgeții minime:

$$R_{max} = \frac{10^6 D^4 C_A l_{opt}^2}{3{,}45 C_A a^2 l_{opt}^2 (a + l_{opt}) + 10^6 D^4 l_{opt}^2 \left(1 + \frac{2a}{l_{opt}}\right) + 10^6 D^4 a^2 (1+K)}. \tag{4}$$

În aceste relații, $K = C_A/C_B$, iar $D$ — diametrul exterior al arborelui.

Optimizarea construcției și a raporturilor de montare ale subansamblului arbore principal presupune găsirea unor valori optime și pentru ceilalți parametri ai săi, nu numai pentru distanța dintre lagăre. Pentru

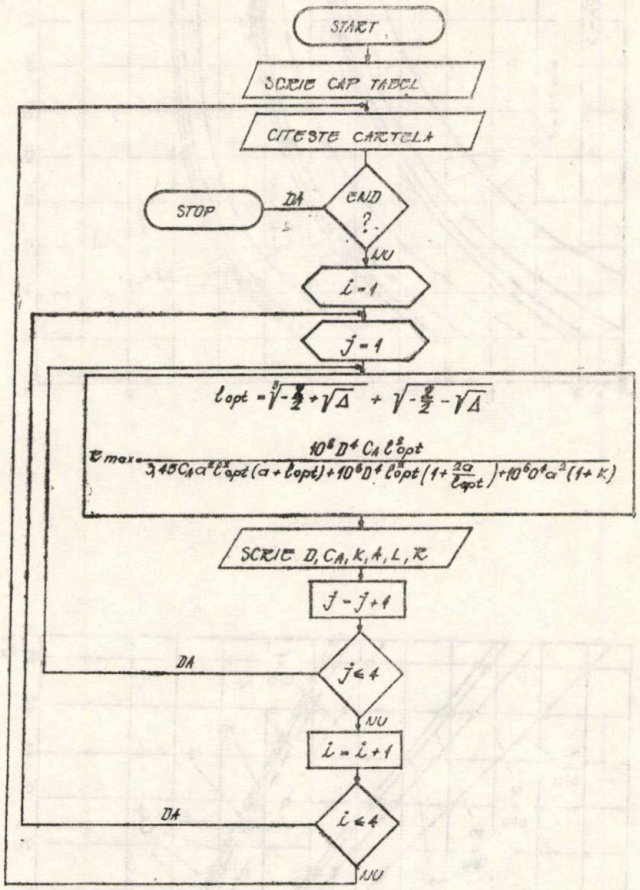



Fig. 2

aceasta, în relațiile (3) și (4) s-au introdus mai multe valori pentru parametrii $D$ [cm], $a$ [cm], $C_A$ [kgf/cm] și $K = C_A/C_B$, care se stabilesc astfel: din STAS 75-68 „Dimensiuni liniare normale", se aleg pentru diametrul $D$ șase valori: $D_1 = 6$ cm, $D_2 = 7$ cm, $D_3 = 8{,}5$ cm, $D_4 = 10$ cm, $D_5 = 12$ cm și $D_6 = 13$ cm, care pot constitui valoarea diametrului arborelui principal pentru unul dintre strungurile normale. Pentru lungimea în consolă s-au ales patru valori pentru fiecare diametru de arbore: $a_1 = D$, $a_2 = 2D$, $a_3 = 3D$ și $a_4 = 4D$. Pentru raportul $K = C_A/C_B$, s-au ales, de asemenea, patru valori diferite: $K_1 = 1{,}65$ (valoare utilizată și în lucrarea [5]), $K_2 = 1{,}40$ [6], $K_3 = 1{,}25$ [4] și $K_4 = 1{,}00$.

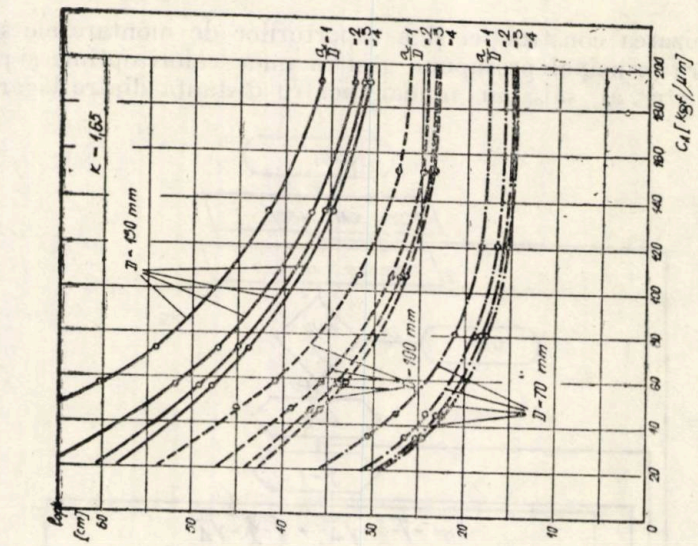

k = 1,65
D = 150 mm
D = 100 mm
D = 70 mm
$\frac{a}{D}$ = 1
2
3
4
$l_{opt}$ [cm]
$C_A$ [kgf/μm]

Fig. 4

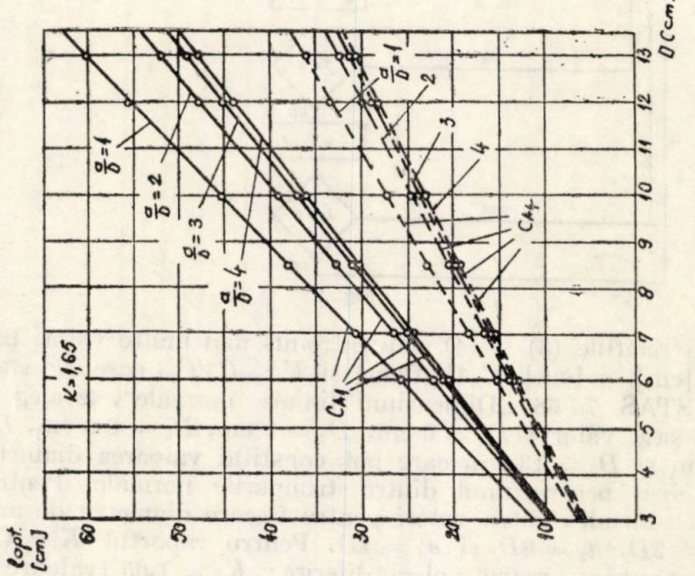

k = 1,65
$\frac{a}{b}$ = 1
2
3
4
$C_{M1}$
$C_{M2}$
$l_{opt}$ [cm]
D [cm]

Fig. 3

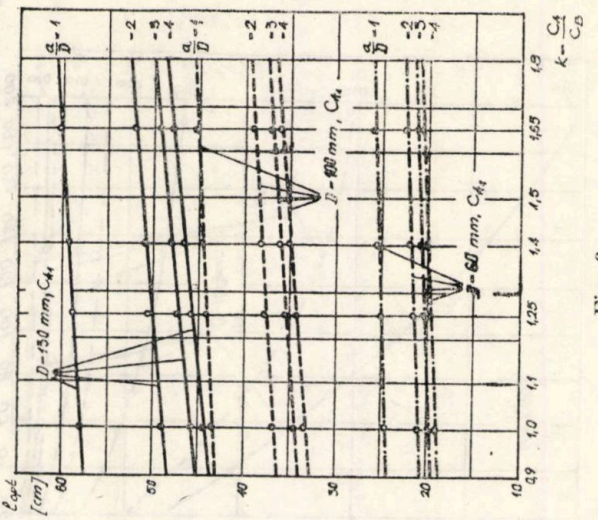

D=130 mm, CA1
D=100 mm, CA1
D=60 mm, CA1
a/D=1
-2
-3
-4
k=CA/CD

Fig. 6

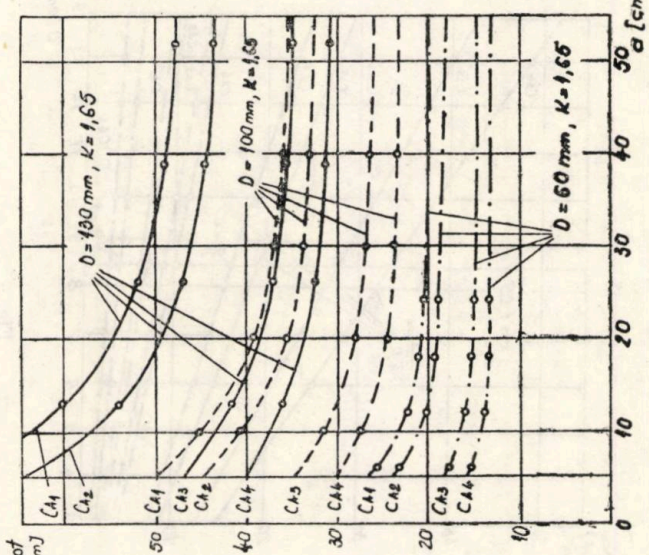

D=130 mm, K=1,65
D=100 mm, K=1,65
D=60 mm, K=1,65
CA1
CA2
CA3
CA4
a [cm]

Fig. 5

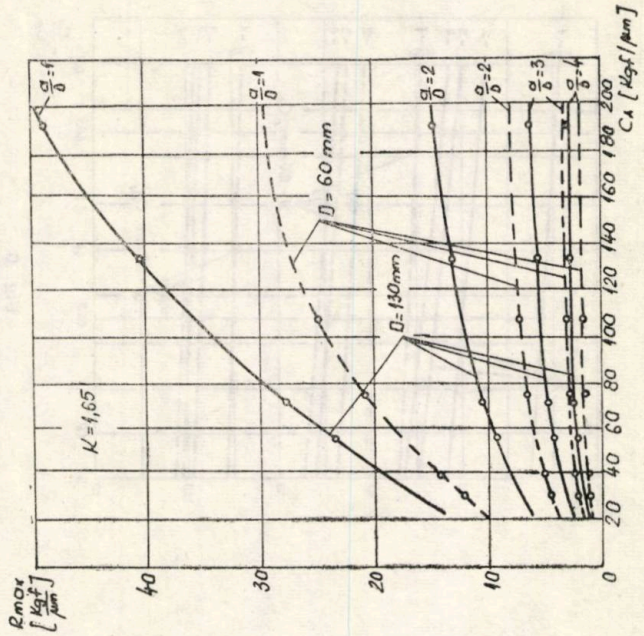

Rmax [kgf/μm]
K=1,65
a/δ=1
a/δ=2
a/δ=3
a/δ=4
D=60 mm
D=130mm
CA [kgf/μm]

Fig. 8

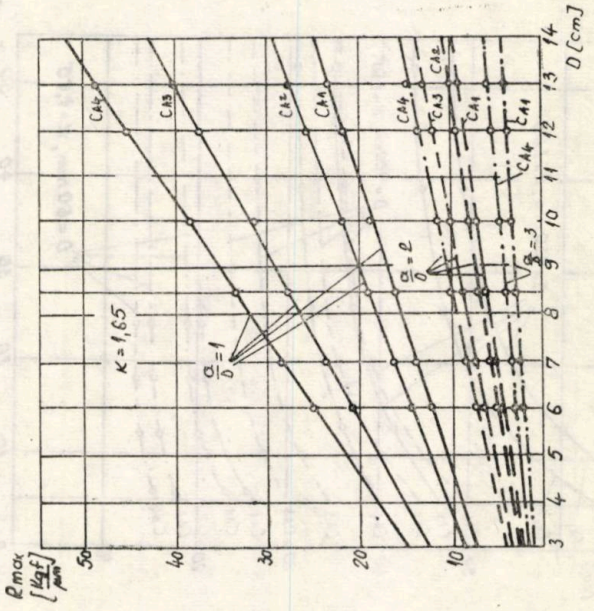

Rmax [kgf/μm]
K=1,65
a/δ=1
a/δ=2
a/δ=3
CA1
CA2
CA3
CA4
D [cm]

Fig. 7

Pentru stabilirea valorilor rigidității $C_A$ a lagărului din față, s-au folosit valorile din lucrarea [2], determinate pe cale experimentală pentru rulmenții din seriile NN30K și NN49U-SKF, la jocuri radiale de + 5 μm, 0 μm, — 5 μm și — 15 μm, lagărul din față al arborelui principal de strung fiind alcătuit dintr-un rulment radial cu role cilindrice pe două rînduri din seria NN30K.

Introducînd valorile acestor parametri în relațiile (3) și (4), au rezultat un număr de 384 de soluții pentru $l_{opt}$ și $R_{max}$, care au fost determinate folosind calculatorul electronic numeric FELIX C-256; programarea s-a făcut în limbajul de programare FORTRAN, folosind organigrama dată în fig. 2. Cu valorile astfel determinate, s-au alcătuit tabele și s-au trasat graficele din fig. 3...fig. 8, cu ajutorul cărora se pot alege parametrii constructivi și de montare optimi ai subansamblului și se poate stabili rigiditatea maximă a subansamblului ce se poate obține într-un anume caz.

Avînd parametrii $D$, $a$, $l$, $C_A$ și $C_B$ aleși la valori optime după graficele prezentate, se poate determina poziția optimă a roții sau roților de acționare de pe arborele principal, astfel: în schema din fig. 1 *c*, se observă că există pe arbore un punct $C$, situat la distanța $x_0$ de lagărul din spate, care nu suferă nici o deplasare. Avînd în vedere principiul interacțiunii dintre forță și deplasarea cauzată de aceasta, al lui Maxwell, se poate conchide că, dacă o forță care acționează la capătul în consolă al arborelui provoacă o deplasare egală cu zero în punctul $C$, atunci o forță aplicată în punctul $C$ va provoca la capătul în consolă al arborelui o deplasare egală cu zero. Rezultă de aici că roata de acționare a arborelui principal va trebui amplasată, în mod optim, în punctul $C$. Pentru distanța $x_0$, s-a dedus relația:

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{2{,}9\,10^5 D^4}{C_B} + \sqrt{\frac{8{,}4\cdot 10^{10} D^8}{C_B^2} + \left[\frac{1{,}93\,10^5 D^4}{al}\left(\frac{a+l}{C_A} + \frac{a}{C_B}\right) - \frac{l^2}{3}\right]^3}} + \sqrt[3]{\frac{2{,}9\,10^5 D^4}{C_B} - \sqrt{\frac{8{,}4\,10^{10} D^8}{C_B^2} + \left[\frac{1{,}93\,10^5 D^4}{al}\left(\frac{a+l}{C_A} + \frac{a}{C_B}\right) - \frac{l^2}{3}\right]^3}}. \tag{5}$$

Dacă, din motive constructive, nu putem amplasa roata de acționare chiar în punctul $C$, atunci se va determina prin calcule cu cît scade rigiditatea subansamblului dacă se montează roata de acționare la stînga sau la dreapta punctului $C$.

*Primită la 10 octombrie 1975*

*Institutul politehnic, Iași,*
*Catedra de mașini-unelte, scule și tehnologia metalelor*

BIBLIOGRAFIE

1. Gärtner G., *Die Verformung wälzgelagerter Arbeitsspindeln von Werkzeugmaschinen*. Konstruktion, 12, *8*, 312—318 (1960).
2. Günther D., *Untersuchung der Federung von Hauptspindel-Lagerungen in Werkzeugmaschinen*. Industrie-Anzeiger, 87, *78*, 1895—1902 (1965).

3. Honrath K., *Über die Starrheit von Werkzeugmaschinenspindeln und deren Lagerungen.* Diss, T. H. Aachen, 1960.
4. Jakkel O., *Steifigkeit von Werkzeugmaschinen-Hauptsspindeln.* Maschinenmarkt, **75**, *35*, 730–735 (1969).
5. Kunkel H., *Untersuchungen über das statische und dynamiche Verhalten verschiedener Spindel-Lager-Systeme in Werkzeugmaschinen.* Diss. T. H. Aachen, 1966.
6. Pitroff H., Wiche E., *Laufgüte von Werkzeugmaschinenspindeln.* Werkstatt und Betrieb, **102**, *8*, 547–559 (1969).
7. Zetu D., *Contribuții privind optimizarea construcției subansamblului arbore principal al mașinilor-unelte avînd în vedere comportarea sa la solicitări statice și dinamice.* Teză de doctorat, Inst. polit. Iași, 1974.

## CONTRIBUTIONS CONCERNANT LE CALCUL DU SOUSENSEMBLE DE LA BROCHE DE MACHINES-OUTILS COMPTE TENU DE SON COMPORTEMENT SOUS CHARGES STATIQUES

(Résumé)

On présente les résultats des études théoriques sur le comportement du sousensemble de la broche de machines-outils soumis à l'action des charges statiques, ainsi que les résultats sur l'optimisation de la construction de ce sousensemble.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.9

# UNELE CONSIDERAȚIUNI PRIVIND INFLUENȚA UNGHIULUI CONULUI ȘI A FORȚEI AXIALE DE STRÎNGERE ASUPRA DEFORMAȚIILOR PIESELOR POZIȚIONATE ÎNTRE VÎRFURI FIXE

DE

N. GOJINEȚCHI, N. GHERGHEL și I. UDREA

## 1. Introducere

Piesele de forma arborilor poziționate în dispozitive cu vîrfuri fixe, fără reazeme suplimentare, solicitate de forțele ce iau naștere în timpul prelucrării, sînt asimilate cu grinzi simplu rezemate solicitate de o forță transversală în planul axei și perpendiculară la aceasta [1], [2], calculul deformației maxime făcîndu-se după Sneerson, Polikarpov, Sarbaș [1] cu relațiile clasice din rezistența materialelor, prin introducerea unor eventuale corecții relative la partea cifrică. În unele lucrări se precizează că valoarea maximă a acestei deformații depinde printre altele de conicitatea vîrfului și de mărimea forței axiale cu care se acționează asupra vîrfului [1], [2].

Lucrarea de față se referă la unele rezultate ale cercetărilor experimentale privind influența forței axiale $N$ cu care sînt acționate vîrfurile și a unghiului acestora $\alpha$ asupra deformației $y$ a pieselor de forma arborilor netezi poziționați între vîrfuri fixe.

## 2. Aparatură și metodologie

Pentru cercetare s-a utilizat standul prezentat în fig. 1.

Piesa *1* este poziționată pe două vîrfuri fixate în mandrina universală *2*, respectiv în păpușa mobilă *3*. Păpușa mobilă *3* este prevăzută cu un mecanism de strîngere cu șurub și cu un dinamometru *4* cu arc taler care dezvoltă și respectiv măsoară forța axială $N$. Forța transversală $P$ este dezvoltată de asemenea de un mecanism cu șurub *5* și este măsurată cu un dinamometru *6* de tip cu inel de deformare. Acest ultim ansamblu poate fi deplasat în lungul axei piesei poziționate, în vederea schimbării poziției forței $P$. Deformațiile $y$ ale piesei se măsoară cu comparatoarele cu cadran *7*.

S-au utilizat trei perechi de vîrfuri avînd unghiul conului $\alpha = 30°$, 60°, 90° și piese cu diametrul $d = 25$ mm și 38 mm și lungimea de 600 mm, găurile de centrare avînd unghiurile conurilor specificate anterior.

Metoda de cercetare este următoarea: se variază succesiv parametrii $N$, $\alpha$, $d$, și forța transversală $P$, plasată în cazul de față la mijlocul piesei și se măsoară deformațiile pieselor în diferite puncte plasate pe o aceeași generatoare. Datele obținute se prelucrează în mod corespunzător.

## 3. Rezultatele cercetărilor

Utilizînd aparatura și metodologia prezentată, s-au obținut rezultatele experimentale prezentate în diagramele din fig. 2...4.

Diagrama din fig. 2 reprezintă variația deformației $y$ a unei piese de tipul arborilor netezi cu diametrul $d = 25$ mm, funcție de forța axială $N$ pentru diverse valori ale forțelor transversale $P$. Marea majoritate a curbelor indică următorul fenomen: la început deformația $y$ scade cu creș-

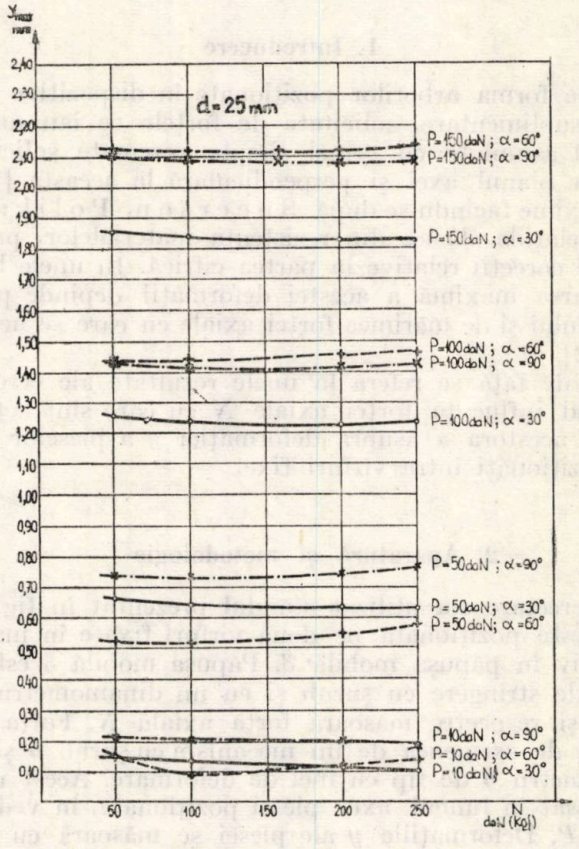



Fig. 2

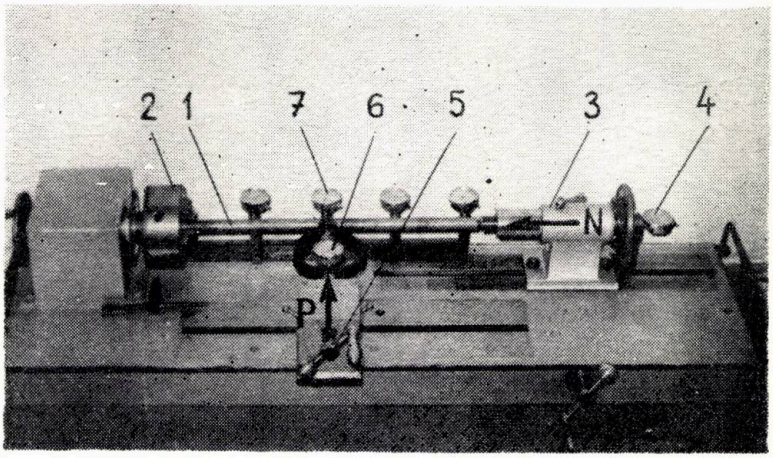



Fig. 1

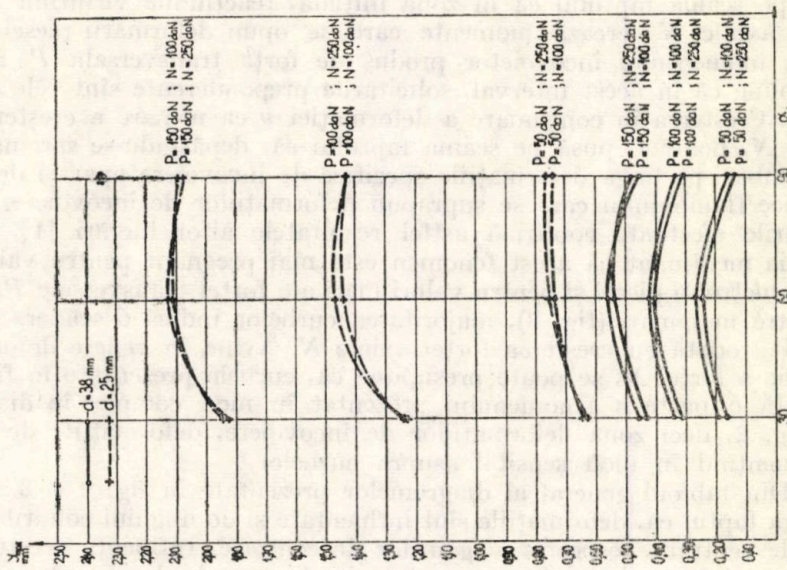

d=38 mm
d=25 mm
P=150 daN ; N=150 daN
P=150 daN ; N=250 daN
P=100 daN ; N=250 daN
P=100 daN ; N=100 daN
P=50 daN ; N=250 daN
P=50 daN ; N=100 daN
P=150 daN ; N=250 daN
P=150 daN ; N=100 daN
P=100 daN ; N=100 daN
P=100 daN ; N=250 daN
P=50 daN ; N=100 daN
P=50 daN ; N=250 daN
g/60s

Fig. 4

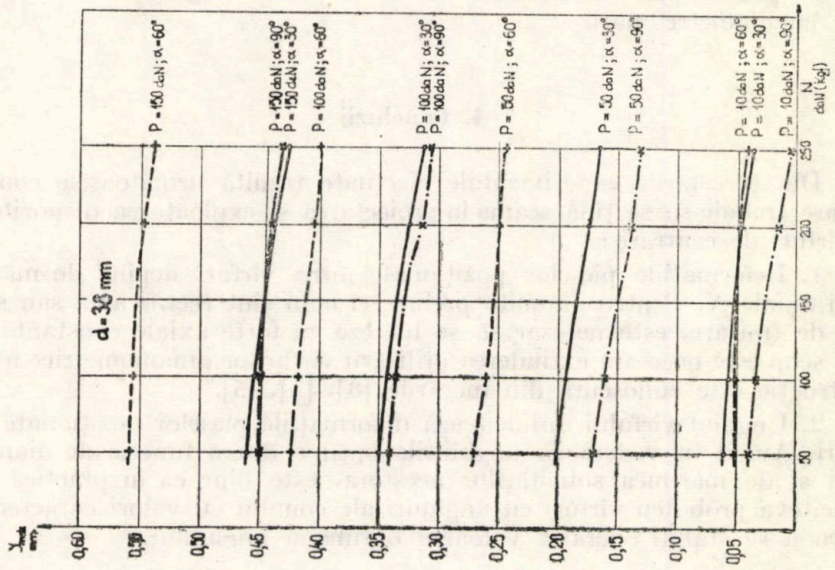

d=38 mm
P = 150 daN ; α=60°
P = 150 daN ; α=90°
P = 150 daN ; α=30°
P = 100 daN ; α=60°
P = 100 daN ; α=30°
P = 100 daN ; α=90°
P = 50 daN ; α=60°
P = 50 daN ; α=30°
P = 50 daN ; α=90°
P = 10 daN ; α=60°
P = 10 daN ; α=30°
P = 10 daN ; α=90°
N daN (kgf)

Fig. 3

terea forței axiale $N$; creșterea în continuare a forței $N$ este însoțită de o creștere a deformației $y$. O asemenea variație a deformației $y$ poate fi pusă pe seama faptului că în zona inițială, reacțiunile vîrfurilor datorate forței axiale $N$ crează momente care se opun deformării piesei sub acțiunea momentului încovoietor produs de forța transversală $P$. Se poate presupune că în acest interval, solicitările preponderente sînt cele de încovoiere. Creșterea în continuare a deformației $y$ ca urmare a creșterii forței axiale $N$, poate fi pusă pe seama faptului că, depășindu-se sarcina critică de flambaj, pe lîngă deformațiile specifice de încovoiere apar și deformații specifice flambajului care se suprapun deformațiilor de încovoiere. Experimentările efectuate confirmă astfel rezultatele altor lucrări [1], [2], [5]. Trebuie menționat că acest fenomen este mai pregnant pentru valori mici ale diametrului piesei și pentru valori mari ale forței transversale $P$. Pentru diametre mai mari (fig. 3), majoritatea curbelor indică o scădere a deformației $y$ odată cu creșterea forței axiale $N$. Avînd în vedere domeniul de variație a forței $N$, se poate presupune că, curbele prezentate în fig. 3 reprezintă o parte a fenomenului prezentat în mod complet în diagramele din fig. 2, deci zona deformațiilor de încovoiere, deformațiile de flambaj neinfluențînd în mod sensibil asupra curbelor.

Din tabloul general al diagramelor prezentate în fig. 2 și 3 se poate observa faptul că, deformațiile sînt influențate și de unghiul conurilor vîrfurilor de centrare, respectiv al găurilor de centrare. Influența acestui unghi $\alpha$ asupra deformației $y$ este prezentată în diagramele din fig. 4.

Din majoritatea diagramelor rezultă că deformația maximă $y$ se obține pentru unghiul $\alpha = 60°$, valorile minime fiind obținute pentru unghiul $\alpha = 30°$ pentru piese cu diametre mici și pentru unghiul $\alpha = 90°$ pentru piese cu diametre mari.

## 4. Concluzii

Din cercetările experimentale efectuate rezultă următoarele concluzii de care trebuie să se țină seama la proiectarea și exploatarea dispozitivelor cu vîrfuri de centrare:

1. Deformațiile pieselor poziționate între vîrfuri depind de mărimea forței axiale $N$. Pentru anumite prelucrări cum sînt rectificarea sau strunjirea de finisare, este necesar să se lucreze cu forțe axiale constante și în acest scop este necesară extinderea utilizării vîrfurilor dinamometrice a căror construcție este cunoscută din lucrările [3], [4], [5].

2. Unghiul vîrfului influențează deformațiile pieselor poziționate între vîrfuri. Avînd în vedere că unghiurile optime diferă funcție de diametrul piesei și de mărimea solicitărilor acestora, este bine ca în practică să se facă cîteva probe cu vîrfuri cu unghiuri ale conului cu valori caracteristice pentru a se stabili operativ valoarea optimă a unghiului.

*Primită la 18 decembrie 1975*

*Institutul politehnic, Iași,*
*Catedra de mașini unelte și scule*

## BIBLIOGRAFIE

1. Korsakov V. S., *Precizia prelucrării mecanice* (trad. din l. rusă). I. D. T., Buc., 1963.
2. Korsakov V. S., *Calculul şi proiectarea dispozitivelor în construcţia de maşini* (trad. din l. rusă). I. D. T., Buc., 1960.
3. Tache V., Stănescu I., *Proiectarea şi construcţia dispozitivelor*. EDP, Buc., 1964.
4. Stănescu I., Tache V., *Dispozitive pentru maşini-unelte*, Ed. Tehn., Buc., 1969.
5. Gojineţchi N., Rener Al., *Curs de proiectare şi construcţia dispozitivelor*. Rotaprint, Inst. polit. Iaşi, 1970.

## QUELQUES CONSIDÉRATIONS CONCERNANT L'INFLUENCE DE L'ANGLE DU CONE ET DE LA FORCE AXIALE DE SERREMENT SUR LES DÉFORMATIONS DES PIÈCES POSITIONÉS ENTRE LES POINTES FIXES DU TOUR

(Résumé)

On présent l'appareil, la méthodologie et les résultats des recherches expérimentales concernant l'influence de l'angle du cône et des forces axiales de serrement sur les déformations des pièces positionés entre les pointes fixes du tour.

Tiparul executat la Întreprinderea poligrafică Iaşi str. Vasile Alecsandri nr. 6
sub comanda nr. 105
Republica Socialistă România

1977 JAN 11

40822

F 1503/4

1977 MAR 29

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 3—4

SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1976

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 3—4

## SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1976

**COLEGIUL DE REDACȚIE**

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. dr. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

**COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI**

**IV. MECANICĂ TEHNICĂ**

Prof. dr. doc. T. FĂRCAȘ
Prof. dr. ing. C. CIOBANU
Conf. ing. CR. LINDE

**REDACȚIA**

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. doc. ing. ALFRED BRAIER (secretar de redacție)
Șef de lucrări ing. I. CONDREA (secretar de redacție adjunct)
Asist. ing ANETA BRAIER (redactor)

ORSZÁGOS MUSZAKI KÖNYVTÁR ES DOKUMENTÁCIÓS HIVATAL 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XXII (XXVI), fasc. 3—4 1976

Secţia IV

# MECANICĂ TEHNICĂ

## SUMAR

Pag.

N. I. MANOLESCU, N. PANDREA şi D. M. NICA, O nouă metodă pentru determinarea punctelor lui Burmester cu ajutorul conicelor lui Hackmüller (franc., rez. rom.) . . . . . 7

ALFRED BRAIER, SILVIA NEAGU şi GH. SAVITESCU, Răspunsul frecvenţial al sistemelor de ordinul doi la intrări modulate în amplitudine (III) (engl., rez. rom.) . . . . . 19

ILIE N. CONSTANTINESCU şi RADU CIPRIAN BOLOG CÎRJA, Studiul vibraţiilor nedisipative şi disipative longitudinale, torsionale şi transversale ale barelor drepte (engl., rez. rom.) . . . . . 25

ELISABETA RUSU, Deformaţii termoelastice finite pentru un solid aproape incompresibil (engl., rez. rom.) . . . . . 31

PAUL MATEI, Electromodelarea cîmpului hidrodinamic în planul median al turbomaşinilor axiale (rom., rez. germ.) . . . . . 39

C. PICOŞ, LAURENŢIU SLĂTINEANU şi TRAIAN GRĂMESCU, Asupra prelucrabilităţii prin strunjire frontală de finisare a unor oţeluri carbon de calitate (franc., rez. rom.) . . . . . 49

GH. I. ILIESCU, Asupra cercetării fenomenului de oboseală la oţelurile carbon, prin măsurarea postefectului magnetic (rom., rez. germ.) . . . . . 55

ADRIAN M. VUSATIUC, Asupra unei propuneri de prelucrare a rezultatelor încercărilor de uzură prin frecare de alunecare (rom., rez. engl.) . . . . . 61

GH. CAŞLER, N. GOJINEŢCHI şi VITALIE BELOUS, Studiul geometric teoretico-experimental al suprafeţelor de aşezare ale burghielor elicoidale ascuţite după metoda cilindro-eliptică dublă (germ., rez. rom.) . . . . . 65

DAN URSESCU, MARCEL GUTMAN şi RONALD PEREZ, Recuperarea căldurii deşeu cu ajutorul turbinelor de joasă presiune (engl., rez. rom.) . . . . 73

N. GOJINEŢCHI, Cu privire la unele probleme ale preciziei poziţionării ascuţirii burghielor elicoidale în dispozitivele de prindere ale maşinilor tip ELBITOR (rom., rez. engl.) . . . . . 77

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tom XXII (XXVI), Fasc. 3—4 1976

**Section IV**

## APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

Pp.

N. I. MANOLESCU, N. PANDREA et D. M. NICA, Une nouvelle méthode pour la détermination des points de Burmester à l'aide des coniques de Hackmüller (French, Romanian summary) . . . . . 7

ALFRED BRAIER, SILVIA NEAGU and GH. SAVITESCU, Frequency Response of Second Order Systems to Amplitude Modulated Inputs (III) (English, Romanian summary) . . . . . 19

ILIE N. CONSTANTINESCU and RADU CIPRIAN BOLOG CÎRJA, The Study of Transverse, Torsional, Longitudinal Nondissipative and Dissipative Vibrations of Straight Bars (English, Romanian summary) . . . . . 25

ELISABETA RUSU, Finite Thermoelastic Deformations of an Almost Incompressible Elastic Solid (English, Romanian summary) . . . . . 31

PAUL MATEI, Die Elektromodelierung von hydrodynamischen Meridianfelder bei axiale Turbomaschinen (Romanian, German summary) . . . . . 39

C. PICOŞ, LAURENŢIU SLĂTINEANU et TRAIAN GRĂMESCU, Quelques observations sur l'usinabilité par chariotage transversal de finition de quelques aciers de qualité au carbone (French, Romanian summary) . . 49

GH. I. ILIESCU, Über die Untersuchung der Ermüdungserscheinung bei Kohlenstoffstähle, durch Messung der magnetischen Nachwirkung (Romanian, German summary) . . . . . 55

ADRIAN M. VUSATIUC, A Method of Analysis Wear Experimental Data (Romanian, English summary) . . . . . 61

GH. CAŞLER, N. GOJINEŢCHI und VITALIE BELOUS, Eine theoretische und experimentelle Untersuchung der Geometrie der Freiwinkelflächen der Spiralbohrer mit doppeltem Ellipsenzylindermantelschliff (German, Romanian summary) . . . . . 65

DAN URSESCU, MARCEL GUTMAN and ROLAND PEREZ, The Redeeming of Waste-Heat by Means of Low-Pressure Turbines (English, Romanian summary) . . . . . 73

N. GOJINEŢCHI, Some Problems about the Precision of the Positioning and Elicoidal Drills Sharpening in the Devices of the Machines Type ELBITOR (Romanian, English summary) . . . . . 77

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XXII (XXVI). Вып. 3—4 1976

Секция IV

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Н. И. МАНОЛЕСКУ, Н. ПАНДРИЯ и Д. М. НИКА, Новыи метод для определения точек Бурместера с помощию конических сечении Хакмюллера (франц., рез. рум.) . . . . . 7

АЛФРЕД БРАИЕР, СИЛВИЯ НЯГУ и Г. САВИТЕСКУ, Частотные характеристики систем второго порядка с амплитудно-модели-рующими входами (III) (англ., рез. рум.) . . . . . 19

ИЛИЕ Н. КОНСТАНТИНЕСКУ и РАДУ ЧИПРИЯН БОЛОГ КЭРЖА, Исследование нерассеянных и рассеянных продольных и попе-речных вибрации кручении прямых брусов (англ., рез. рум.) . . 25

ЭЛИСАБЕТА РУСУ, Большие термоупругие деформации для почти несжимаемых тел (англ., рез. рум.) . . . . . 31

ПАУЛ МАТЕИ, Электрическое моделирование гидродинамического поля в меридиональных плоскостях осевых турбомашин (рум., рез. нем.) 39

К. ПИКОШ, ЛАУРЕНЦИЮ СЛЭТИНИЯНУ и ТРАИЯН ГРЭМЕСКУ, О обработываемости чистовым торцовом точением нескольких угле-родистых качественных сталей (франц., рез. рум.) . . . . . 49

Г. И. ИЛИЕСКУ, К исследованию усталости углеродистых сталей, измерением магнитной вязкости (рум., рез. нем.) . . . . . 55

АДРИЯН М. ВУСАТЮК, Об предложении обработки результатов испыта-нии износа трением сколжения (рум., рез. англ.) . . . . . 61

Г. КАШЛЕР, Н. ГОЖИНЕЦКИ и ВИТАЛИЕ БЕЛОУС, Геометричес-кий анализ задних поверхностей винтовых сверл затточненных двойном цилиндро-элиптических способам (нем., рез. рум.) . . . 65

ДАН УРСЕСКУ, МАРЧЕЛ ГУТМАН и РОНАЛД ПЕРЕЗ, Использо-вание остаточном теплоты с помощю паровых турбин низкого давления (англ., рез. рум.) . . . . . 73

Н. ГОЖИНЕЦКИ, Об некоторых вопросах точности установки и заточки винтовых сверл в приспособлениях станков типа ELBITOR (рум., рез. англ.) . . . . . 77

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 513.7

# UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DES POINTS DE BURMESTER À L'AIDE DES CONIQUES DE HACKMÜLLER

PAR

N. I. MANOLESCU, N. PANDREA et D. M. NICA

*Au professeur Dr. Doc. Sci.*
*DIMITRIE ION MANGERON*
*Savant-émérite*
*de la République Socialiste de Roumanie*
*HOMMAGE*
*pour le 70-ème Anniversaire*

## 1. Introduction

La synthèse des mécanismes plans articulés à quatre éléments pour cinq positions imposées à une partie du plan de la bielle se réduit à la détérmination des points de Burmester, qui résultent, comme on le sait, à l'intersection des courbes de centres.

Deux cubiques se rencontrent en neuf points, dont deux sont les points cycliques, trois sont les pôles de rotation et quatre points réels (ou deux points réels et deux imaginaires, ou quatre points imaginaires. Nous nous bornons au premier cas).

Pour la détérmination de ces points, une série de méthodes analytiques et graphiques ont été élaborées.

Ainsi, F. Freudenstein et G. Sandor dans l'ouvrage [2] ont élaboré une méthode basée sur le calcul algébrique à nombres complexes, obtenant une équation complexe de cinquème degré.

Des solutions de cette équation il y en a quatre pour les points de Burmester.

Dans [1], F. Dijinskman élabore une belle méthode analytique, obtenant finalement une équation de quatrième degré, et dans [5] D. Perju élabore une autre méthode spécialement destinée à être appliquée seulement sur ordinateur.

Dans un ouvrage précédent [4] on a élaboré une nouvelle méthode pour déterminer les courbes des centres et les points de Burmester à partir du théorème de l'isoproduit aréolaire, établi par les auteurs, et des propriétés projectives des cubiques.

Dans le présent ouvrage on utilisera les coniques de Hackmüller et on réduira le problème de la détermination des points de Burmester à la résolution d'une équation de troisième degré.

## 2. La courbe des centres

On considère le plan mobile $(p)$ qui se déplace (fig. 1) en restant superposé sur le plan fixe $(P)$. On choisit le système de référence fixe $OXYZ$ de manière que le plan $OXY$ coïncide avec le plan fixe $(P)$ et le système de référence mobile $oxyz$ de façon que le plan $oxy$ coïncide avec le plan mobile $(p)$.

La position du système fixe peut être définie par les coordonées $(a, b)$ de l'origine $O$ et par l'angle $\theta$ que l'axe $ox$ fait avec l axe fixe $OX$ (fig. 1).

Dans cette position, un point quelconque $M$ a les coordonnées $(x, y)$ par rapport au plan $oxy$.

Une position quelconque du plan mobile sera donnée par l'ensemble des valeures $a_i$, $b_i$, $\theta_i$ et, correspondant à cette position, le point $M$ du plan mobile occupera la position $M_i$ (fig. 2).

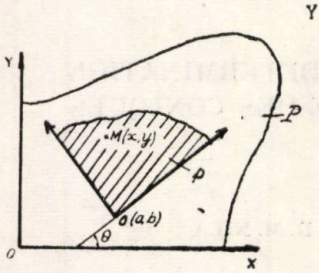



Fig. 1

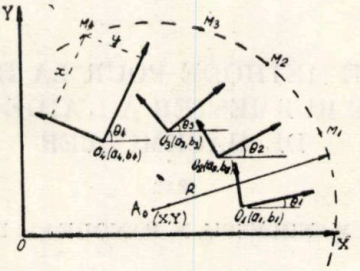



Fig. 2

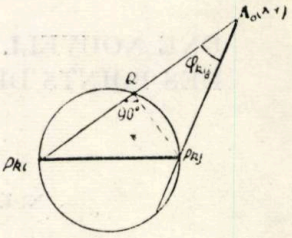



Fig. 3

Soit $(X_i, Y_i)$ les coordonnées du point $M_i$ par rapport au système de référence fixe.

Pour les quatre positions considérées du plan mobile, le point $A_0(X, Y)$ du plan fixe qui se trouve à distances égales des points $M_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ décrit, comme on le sait, par rapport au plan fixe [3] la courbe des centres qui est la cubique $(\Gamma^0_{1234})$.

Pour établir l'équation de cette cubique on détermine d'abord les pôles de rotation $P_{12}$ $P_{13}$, $P_{14}$, $P_{23}$, $P_{24}$, $P_{34}$.

Les coordonnées $(X_{ij}, Y_{ij})$ du pôle $P_{ij}$ par rapport au système de référence fixe sont [4]

$$X_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2} - \frac{b_i - b_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \tag{1}$$

$$Y_{ij} = \frac{b_i + b_j}{2} + \frac{a_i - a_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_i - \theta_j}{2}. \tag{2}$$

On considère le centre $A_0$, les pôles $P_{kj}$, le cercle de diamètre $P_{ki}P_{kj}$ (fig. 3) et $Q$ le point où la droite $A_0P_{ki}$ rencontre ce cercle.

En notant l'aire du triangle $P_{ki}\,A_0\,P_{kj}$, par $A_{kij}$, l'angle $P_{ki}\,A_0\,P_{kj}$ par $\varphi_{kij}$ et la puissance du point $A_0$ par rapport au cercle par $\rho_{kij}$, on peut écrire les relations :

$$2A_{kij} = \overline{A_0P_{ki}}\ \overline{QP_{kj}}, \tag{3}$$

$$\rho_{kij} = \overline{A_0Q}\ \overline{A_0P_{ki}}. \tag{4}$$

En faisant le rapport des relations (3) et (4) on obtient :

$$\operatorname{tg} \varphi_{kij} = \frac{2A_{kij}}{\rho_{kij}}. \tag{5}$$

Si l'on considère les pôles $P_{31}$, $P_{32}$ et les contrepôles $P_{41}$, $P_{42}$ (fig. 4), en appliquant le théorème de l'isovisibilité [3] et en utilisant la relation (5) il en résulte l'équation de la cubique $(\Gamma^0_{1234})$

$$\Delta_{312}\,\rho_{412} - \Delta_{412}\,\rho_{312} = 0, \tag{6}$$

où :

$$\Delta_{kij} = 2A_{kij} = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_{ki} & Y_{ki} & 1 \\ X_{kj} & Y_{kj} & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

et

$$\rho_{kij} = X^2 + Y^2 - X(X_{ki} + X_{kj}) - Y(Y_{ki} + Y_{kj}) + X_{ki}X_{kj} + Y_{ki}Y_{kj}. \tag{8}$$

En général l'équation de la cubique $(\Gamma^0_{ijkm})$ peut s'écrire :

$$\Delta_{kij}\rho_{mij} - \Delta_{mij}\rho_{kij} = 0. \tag{9}$$

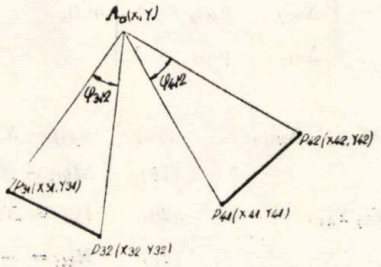


Fig. 4

## 3. Les coniques de Hackmüller

Les points communs des cubiques $(\Gamma^0_{kijm})$, $(\Gamma^0_{kijn})$ seront : les points cycliques, les pôles $P_{ij}$, $P_{ik}$, $P_{jk}$, et les quatre points de Burmester (pour le premier cas pris en considération dans cet ouvrage, § 1).

En supposant que $A_0$ soit l'un de ces quatre points, les segments $\overline{P_{ki}P_{kj}}$, $\overline{P_{mi}P_{mj}}$ sont vus sous des angles égaux, c'est-à-dire (fig. 5)

$$\varphi_{kij} = \varphi_{mij} = \varphi_{nij}. \tag{10}$$

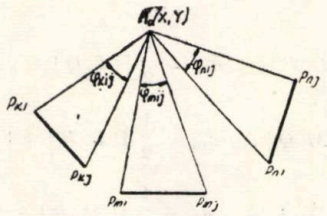


Fig. 5

En tenant compte des relations (5) et (10) on peut écrire :

$$\frac{\Delta_{kij}}{\rho_{kij}} = \frac{\Delta_{mij}}{\rho_{mij}} = \frac{\Delta_{nij}}{\rho_{nij}}, \tag{11}$$

où

$$\frac{\Delta_{kij} - \Delta_{mij}}{\rho_{kij} - \rho_{mij}} = \frac{\Delta_{kij} - \Delta_{nij}}{\rho_{kij} - \rho_{nij}}. \tag{12}$$

De là résulte, comme ci-dessous, l'équation :

$$(\Delta_{kij} - \Delta_{mij})(\rho_{kij} - \rho_{nij}) - (\Delta_{kij} - \Delta_{nij})(\rho_{kij} - \rho_{mij}) = 0. \tag{13}$$

En tenant compte des expresions (7) et (8) il est facile de voir que cette équation est de deuxième degré, c'est-à-dire qu'elle représente l'équation d'une conique $(C_{ij})$ qui est nommée *conique de Hackmüller* [1].

Cette conique passe par les quatre points de Burmester et par le pôle $P_{ij}$, car c'est seulement ces points-ci qui remplissent les conditions (10).

Il est évident donc, que pour cinq positions imposées au plan de la bielle il y aura dix coniques de Hackmüller, $(C_{12})$, $(C_{13})$, $(C_{14})$, $(C_{15})$, $(C_{23})$, $(C_{24})$, $(C_{25})$, $(C_{34})$, $(C_{35})$, $(C_{45})$, qui passent par les quatre points de Burmester $A_0$, $B_0$, $C_0$, $D_0$.

On peut mettre l'équation de la conique $(C_{ij})$ sous la forme

$$\begin{vmatrix} \Delta_{kij} & \mu_{kij} & 1 \\ \Delta_{mij} & \mu_{mij} & 1 \\ \Delta_{nij} & \mu_{nij} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{14}$$

où :

$$\Delta_{kij} = XL_{kij} + YM_{kij} + N_{kij}, \tag{15}$$

$$\mu_{kij} = XP_{kij} + YQ_{kij} + R_{kij}, \tag{16}$$

$$L_{kij} = Y_{ki} - Y_{kj}, \tag{17}$$

$$M_{kij} = X_{kj} - X_{ki}, \tag{18}$$

$$N_{kij} = X_{ki}Y_{kj} - X_{kj}Y_{ki}, \tag{19}$$

$$P_{kij} = X_{ki} + X_{kj}, \tag{20}$$

$$Q_{kij} = Y_{ki} + Y_{kj}, \tag{21}$$

$$R_{kij} = -(X_{ki}X_{kj} + Y_{ki}Y_{kj}). \tag{22}$$

Si l'on note :

$$\begin{vmatrix} L_{kij} & P_{kij} & 1 \\ L_{mij} & P_{mij} & 1 \\ L_{nij} & P_{nij} & 1 \end{vmatrix} = |L, P|, \tag{23}$$

l'équation de la conique Hackmüller $(C_{ij})$ peut s'écrire :

$$f_{ij}(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33} = 0, \tag{24}$$

où :

$$\begin{aligned} a_{11} &= |L, P|, \quad a_{12} = \frac{1}{2}[|L, Q| + |M, P|], \\ a_{22} &= |M, Q|, \quad a_{13} = \frac{1}{2}[|L, R| + |N, P|], \\ a_{33} &= |N, R|, \quad a_{23} = \frac{1}{2}[|M, R| + |N, Q|]. \end{aligned} \tag{25}$$

Les points de Burmester se trouveront à l'intersection de deux coniques de Hackmüller, par exemple $(C_{12})$, $(C_{13})$. Les équations de ces coniques sont :

$$f_{12}(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33} = 0, \tag{26}$$

$$f_{13}(X, Y) = b_{11}X^2 + 2b_{12}XY + b_{22}Y^2 + 2b_{13}X + 2b_{23}Y + b_{33} = 0. \tag{27}$$

Les coefficients de la conique $(C_{12})$ résultent des relations (25) où $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, $m = 4$, $n = 5$, et les coefficients de la conique $(C_{13})$ résultent des mêmes relations où $i = 1$, $j = 3$, $k = 2$, $m = 4$, $n = 5$.

La résolution de

$$(C_{ij}) \cap (C_{ik}) \Rightarrow A_0\,;\ B_0\,;\ C_0\,;\ D_0 \tag{28}$$

à l'aide de l'ordinateur n'est maintenant qu'un problème de technique.

Dans l'annexe 1 sont présentés les dix coniques de Hackmüller $(C_{12})$... ...$(C_{45})$ avec les valeurs des indices $i, j, k, m, n$ qui doivent-être introduites dans les expressions des coefficients :

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23},$$
$$b_{11},\ b_{22},\ b_{33},\ b_{12},\ b_{13},\ b_{23}$$

de ces équations.

Il est évident que nous avons $C_{10}^2 = 45$ possibilités pour déterminer les points de Burmester par l'opération (28), au lieu de $C_5^2 = 10$, dans le cas classique de deux cubiques $(\Gamma^0_{ijkm}) \cap (\Gamma^0_{ijkn})$.

Aussi dans ce cas est-il possible de simplifier le problème, en réduisant la résolution de (28) à l'une d'une équation de troisième degré au lieu de quatrième.

## 4. La détermination de l'équation de troisième degré

C'est toujours par les quatre points de Burmester que passeront toutes les coniques du fascicule :

$$f_{12}(X, Y) + \lambda f_{13}(X, Y) = 0. \tag{29}$$

Parmi ces coniques il y a aussi des coniques dégénérées qui correspondent aux valeurs des paramètres $\lambda$ qui vérifient l'équation :

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} \\ a_{12}+\lambda b_{12} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{13}+\lambda b_{13} & a_{23}+\lambda b_{23} & a_{33}+\lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{30}$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$\lambda^3 + g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3 = 0, \tag{31}$$

où

$$g_1 = \frac{d_2}{d_1}, \qquad g_2 = \frac{d_3}{d_1}, \qquad g_3 = \frac{d_4}{d_1} \tag{32}$$

et

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} \\ b_{12} & b_{22} & a_{23} \\ b_{13} & b_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} \\ b_{12} & a_{22} & b_{23} \\ b_{13} & a_{23} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{12} & b_{22} & b_{23} \\ a_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}, \tag{33}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{12} & b_{22} & a_{23} \\ a_{13} & b_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{12} & a_{22} & b_{23} \\ a_{13} & a_{23} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

On peut résoudre l'équation (31) comme on le sait, directement, en appliquant la formule de Cardan.

### 5. Détermination des points de Burmester

Pour déterminer les points de Burmester on peut considérer deux conique dégénérées qui passent évidemment par ces points.

Si $\lambda$ vérifie l'équation (31), l'équation d'une conique dégénérée peut s'écrire :

$$c_{11}X^2 + 2c_{12}XY + c_{22}Y^2 + 2c_{13}X + 2c_{23}Y + c_{33} = 0, \tag{34}$$

où

$$c_{ij} = a_{ij} + \lambda b_{ij}. \tag{35}$$

On peut mettre cette équation sous la forme d'un produit d'expressions linéaires

$$F_1(X, Y)\,F_2(X, Y) = 0, \tag{36}$$

où :

$$F_{1,2}(X, Y) = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13} \pm \left(Y\sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}} + \nu\sqrt{c_{13}^2 - c_{11}c_{33}}\right), \tag{37}$$

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23} > 0, \\ -1 & \text{si} \quad c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23} < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Soit $\lambda'$ et $\lambda''$ deux solutions quelconque de l'équation (31) et $c'_{ij}$, $c''_{ij}$ les valeurs obtenues de la relation (35). Si l'on note :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{c'_{12} + \sqrt{c'^2_{12} - c'_{11}c'_{22}}}{c_{11}}, & \beta_1 &= \frac{c'_{13} + \nu'\sqrt{c'^2_{13} - c'_{11}c'_{33}}}{c'_{11}}, \\
\alpha_2 &= \frac{c'_{12} - \sqrt{c'^2_{12} - c'_{11}c'_{22}}}{c_{11}}, & \beta_2 &= \frac{c'_{13} - \nu'\sqrt{c'^2_{13} - c'_{11}c'_{33}}}{c_{11}}, \\
\gamma_1 &= \frac{c''_{12} + \sqrt{c''^2_{12} - c''_{11}c''_{22}}}{c_{11}}, & \delta_1 &= \frac{c''_{13} + \nu''\sqrt{c''^2_{13} - c''_{11}c''_{33}}}{c''_{11}}, \\
\gamma_2 &= \frac{c''_{12} - \sqrt{c''^2_{12} - c''_{11}c''_{22}}}{c''_{11}}, & \delta_2 &= \frac{c''_{13} - \nu''\sqrt{c''^2_{13} - c''_{11}c''_{33}}}{c''_{11}},
\end{aligned} \tag{39}$$

on peut écrire quatre systèmes d'équations linéaires ayant la forme :

$$\begin{aligned} X + \alpha_i Y + \beta_i &= 0, \\ X + \gamma_j Y + \delta_j &= 0, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2;\ j = 1, 2). \tag{40}$$

En résolvant ces équations on en obtient les coordonnées des quatre points de Burmester :

$$X_{A_0} = \frac{\delta_1 - \beta_1}{\alpha_1 - \gamma_1}, \qquad Y_{A_0} = \frac{\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1 - \gamma_1},$$

$$X_{B_0} = \frac{\delta_1 - \beta_2}{\alpha_2 - \gamma_1}, \qquad Y_{B_0} = \frac{\beta_2 \gamma_1 - \alpha_2 \delta_1}{\alpha_2 - \gamma_1},$$

$$X_{C_0} = \frac{\delta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \gamma_2}, \qquad Y_{C_0} = \frac{\beta_1 \gamma_2 - \alpha_1 \delta_2}{\alpha_1 - \gamma_2},$$

$$X_{D_0} = \frac{\delta_2 - \beta_2}{\alpha_2 - \gamma_2}, \qquad Y_{D_0} = \frac{\beta_2 \gamma_2 - \alpha_2 \delta_2}{\alpha_2 - \gamma_2}.$$

## 6. Détermination de la longueur des éléments du mécanisme

Pour réaliser le mécanisme qui répond aux exigeances imposées, on choisit deux points de Burmester, par exemple $A_0$ et $B_0$ qui constitueront les articulations fixes (fig. 6).

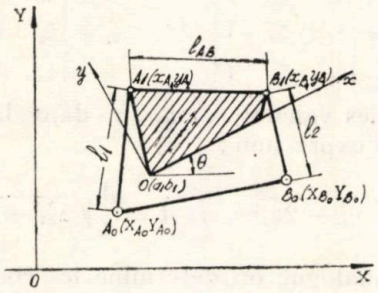



Fig. 6

Au moment où le plan $xoy$ se déplace, l'articulation mobile $A$ se trouvera dans les positions $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, de manière que :

$$\overline{A_0A_1} = \overline{A_0A_2} = \overline{A_0A_3} = \overline{A_0A_4} = \overline{A_0A_5} = l_{A_0A} = l_1 . \tag{42}$$

Compte tenu de ce que $(x, y)$ sont les coordonnées du point $A$ par rapport au système $xoy$, on a :

$$(a_i - Y_{A_0} + x_1 \cos\theta_i - y_1 \sin\theta_i)^2 + (b_i - Y_{A_0} + x_1 \sin\theta_1 + y_1 \cos\theta_1)^2 = l_1^2. \tag{43}$$

En considérant $i = 1, 2, 3$ et en faisant les notations :

$$\xi_i = (a_i - X_{A_0}) \cos\theta_i + (b_i - Y_{A_0}) \sin\theta_i , \tag{44}$$

$$\eta_i = -(a_i - X_{A_0}) \sin\theta_i + (b_i - Y_{A_0}) \cos\theta_i , \tag{45}$$

$$\zeta_i = -\frac{1}{2}[(a_i - X_{A_0})^2 + (b_i - Y_{A_0})^2] , \tag{46}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}(l_1^2 - x_1^2 - y_1^2), \tag{47}$$

on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1 &= \zeta_1, \\ x_1\xi_2 + y_1\eta_2 + z_1 &= \zeta_2, \\ x_1\xi_3 + y_1\eta_3 + z_1 &= \zeta_3, \end{aligned} \tag{48}$$

qui a pour solution

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \qquad y_1 = \frac{\Delta_{y_1}}{\Delta}, \qquad z_1 = \frac{\Delta_{z_1}}{\Delta}, \tag{49}$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x1} = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \eta_1 & 1 \\ \zeta_2 & \eta_2 & 1 \\ \zeta_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ \Delta_{y1} &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{z1} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{50}$$

En introduisant les valeurs $x_1$, $y_1$, $z_1$ dans la relation (47) il résulte pour la longueur $l_1$, l'expression :

$$l_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2z_1} = \overline{A_0 A} = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\Delta_{x1}^2 + \Delta_{y1}^2 - 2\Delta_{z1}^2}. \tag{51}$$

D'une manière analogue on détermine les coordonnées $(x_{B1}, y_{B1})$ du point $B$ et par suite on peut calculer la distance $l_2 = \overline{B_0 B}$.

La distance $l_{AB} = \overline{AB}$ résulte de la relation :

$$l_{AB} = \sqrt{(x_{A1} - x_{B1})^2 + (y_{A1} - y_{B1})^2} = \overline{AB}. \tag{52}$$

## 7. Conclusions

Si l'on suppose qu'on nous donne comme éléments connus $a_i$, $b_i$, $\theta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ la méthode de calcul sera la suivante :

7.1. On détermine les coordonnées des pôles de rotation par les formules (1), (2).

7.2. On considère $i = 1$, $j = 2$ et on détermine les coefficients $L_{k12}$, $M_{k12}$, $N_{k12}$, $P_{k12}$, $Q_{k12}$, $R_{k12}$ $(k = 3, 4, 5)$ à l'aide des rélations (15)—(22).

7.3. On calcule les coefficients $a_{ij}$ à l'aide des relations (25).

7.4. On calcule les coefficients $g_1$, $g_2$, $g_3$ à l'aide des relations (32) et (33).

7.5. On résout l'équation (32) et on détermine $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$.

7.6. On calcule les coefficients $c'_{ij}$, $c''_{ij}$ des relations (35) à partir des valeurs des coefficients $\lambda'$ et $\lambda''$.

7.7. On calcule $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\delta_1$, $\delta_2$ des relations (39).

7.8. On détermine les coordonnées des quatre points de Burmester $A_0$, $B_0$, $C_0$, $D_0$ avec les relations (41).

7.9. On détermine les coordonnées des articulations mobiles par rapport au système $xoy$ avec les relations (44) — (50).

7.10. On détermine la longueur des éléments du mécanisme avec les relations (51) et (52).

## 8. Application numérique

**8.1** Pour vérifier la présente méthode, on considère l'exemple traité dans l'ouvrage [5] où l'on donne :

$$\begin{array}{lll} a_1 = 8{,}45, & b_1 = 6{,}15, & \theta_1 = 75°, \\ a_2 = 4{,}85, & b_2 = 5{,}27, & \theta_2 = 73°18', \\ a_3 = 4{,}18, & b_3 = 6{,}16, & \theta_3 = 61°24', \\ a_4 = 4{,}87, & b_4 = 7{,}95, & \theta_4 = 48°, \\ a_5 = 8{,}73, & b_5 = 9{,}16, & \theta_5 = 41°12'. \end{array}$$

**8.2** Les coordonnées de $P_{ij}$ déduites des relations (1) et (2) :

$$\begin{array}{lll} P_{12}(-23{,}007\ ,\ 127{,}03), & P_{24}(10{,}83\ ,\ 6{,}5655), \\ P_{13}(\ 6{,}3569,\ 24{,}06), & P_{25}(13{,}551,\ 0{,}4716), \\ P_{14}(\ 10{,}409\ ,\ 14{,}506), & P_{34}(12{,}144,\ 4{,}1182), \\ P_{15}(\ 13{,}543\ ,\ 7{,}1943), & P_{35}(14{,}876,\ -5{,}1118), \\ P_{23}(\ 8{,}7847,\ 8{,}9292), & P_{45}(16{,}983,\ -23{,}931). \end{array}$$

**8.3** Les valeurs de $a_{ij}$ et $b_{ij}$ des coniques $(C_{12})$ et $(C_{13})$ de relations (17)...(25) et de l'annexe 1 sont :

$$\begin{array}{llll} a_{11} = -34{,}677, & a_{13} = 162{,}36, & b_{11} = -702{,}65, & b_{13} = 2\,405{,}2, \\ a_{12} = 36{,}328, & a_{23} = -463{,}3, & b_{12} = 922{,}68, & b_{23} = -1\,251{,}8, \\ a_{22} = 21{,}996, & a_{33} = 1\,532{,}3, & b_{22} = 449{,}87, & b_{33} = 5\,752{,}4. \end{array}$$

**8.4** Les coefficients $g_1$, $g_2$ et $g_3$ de l'équation de troisième degré (31) ont les valeurs :

$$g_1 = \frac{d_2}{d_1} = 1{,}5242 \cdot 10^{-1}, \quad g_2 = \frac{d_3}{d_1} = 7{,}4529 \cdot 10^{-3}, \quad g_3 = \frac{d_4}{d_1} = 1{,}1762 \cdot 10^{-4}$$

et les racines de l'équation (31) :

$$\lambda' = -6{,}975 \cdot 10^{-2}, \quad \lambda'' = -4{,}6026 \cdot 10^{-2}, \quad \lambda''' = -3{,}6644 \cdot 10^{-2}.$$

**8.5** Les valeurs des coefficients $c_{ij}$ de (35) sont :

$$\begin{array}{lllllll} c'_{11} = 14{,}332, & c'_{12} = -28{,}028 & c'_{22} = -9{,}422, & c'_{13} = -5{,}402, & c'_{23} = 409{,}83, & c'_{33} = -2\,479{,}9, \\ c''_{11} = -2{,}337, & c''_{12} = -6{,}139, & c''_{22} = 1{,}251, & c''_{13} = 51{,}659, & c''_{23} = 112{,}85, & c''_{33} = -1\,115{,}3. \end{array}$$

**8.6** À l'aide des valeurs ci-dessus on détermine de (39) les coefficients $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_j$, $\beta_j$ :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = -4{,}022, & \beta_1 = 12{,}783, & \gamma_1 = 0{,}56\ , & \delta_1 = -6{,}155, \\ \alpha_2 = 0{,}161, & \beta_2 = -13{,}54\ , & \gamma_2 = -1{,}114, & \delta_2 = -10{,}47 \end{array}$$

et des équations (40) les quatre points de Burmester donnés par les relations (41)

$$\begin{array}{ll} A_0(X_{A0} = 3{,}92,\ Y_{A0} = 4{,}09), & B_0(X_{B0} = 13{,}15,\ Y_{B0} = 2{,}41), \\ C_0(X_{C0} = 16{,}60,\ Y_{C0} = 19{,}01), & D_0(X_{D0} = 19{,}96,\ Y_{D0} = 7{,}86). \end{array}$$

8.7 On a choisi comme articulations fixes les points $A_0$ et $B_0$ et on a obtenu :

$$\overline{A_0 A} = 3{,}07, \qquad \overline{B_0 B} = 6{,}5, \qquad \overline{AB} = 9{,}66.$$

Le mécanisme déterminé est représenté dans la fig. 7 où sont tracés aussi les deux coniques de Hackmüller qui dans l'exemple considéré sont les hiperboles suivantes :

$$(C_{12}) : -34{,}6766\,X^2 + 2\,.\,36{,}328\,XY + 21{,}956\,Y^2 + 2\,.\,162{,}36\,X - 2\,.\,463{,}3\,Y + 1\,532{,}3 = 0,$$
$$(C_{13}) : -702{,}65\,X^2 + 2\,.\,922{,}68\,XY + 449{,}87\,Y^2 + 2\,.\,2405{,}2\,X - 2\,.\,12\,518\,Y + 57\,524 = 0.$$

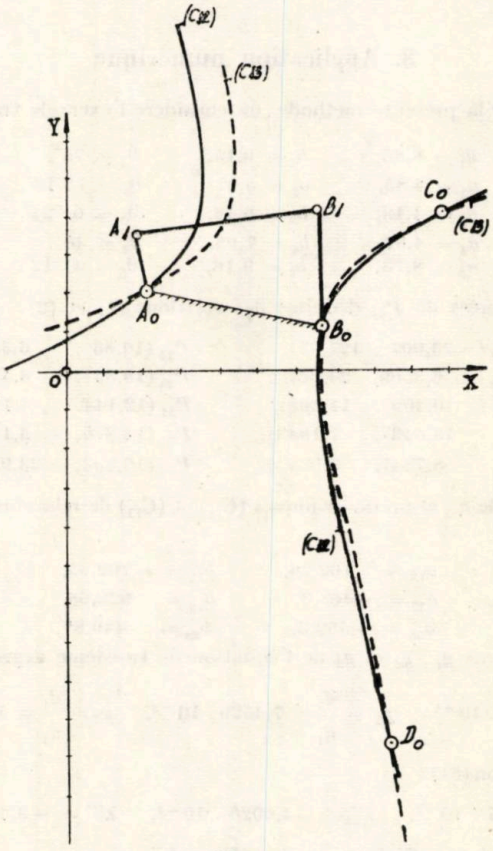



Fig. 7

## Annexe 1

*Les expressions analitiques des dix coniques de Hackmüller à l'aide des coefficients i, j, k, m, n*

$(C_{ij})$ $\qquad f_{ij}(X, Y) = a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 + 2a_{13} X + 2a_{23} Y + a_{33} = 0,$

où les valeurs de (25) sont données par :

$$a_{11} = \begin{vmatrix} Y_{ki} - Y_{kj} & X_{ki} + X_{kj} & 1 \\ Y_{mi} - Y_{mj} & X_{mi} + X_{mj} & 1 \\ Y_{ni} - Y_{nj} & X_{ni} + X^{nj} & 1 \end{vmatrix},$$

$$a_{22} = \begin{vmatrix} X_{kj} - X_{ki} & Y_{ki} + Y_{kj} & 1 \\ X_{mj} - X_{mi} & Y_{mi} + Y_{mj} & 1 \\ X_{nj} - X_{ni} & Y_{mi} + Y_{nj} & 1 \end{vmatrix},$$

$$a_{33} = \begin{vmatrix} X_{ki}Y_{kj} - X_{kj}Y_{ki} & X_{ki}Y_{kj} + Y_{ki}Y_{kj} & 1 \\ X_{mi}Y_{mj} - X_{mj}Y_{mi} & X_{mi}X_{mj} + Y_{mi}Y_{mj} & 1 \\ X_{ni}Y_{nj} - X_{nj}Y_{ni} & X_{ni}X_{nj} + Y_{ni}Y_{nj} & 1 \end{vmatrix},$$

$$2a_{12} = \begin{vmatrix} Y_{ki} - Y_{kj} & Y_{ki} + Y_{kj} & 1 \\ Y_{mi} - Y_{mj} & Y_{mi} + Y_{mj} & 1 \\ Y_{ni} - Y_{nj} & Y_{ni} + Y_{nj} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{kj} - X_{ki} & X_{ki} + X_{kj} & 1 \\ X_{mj} - X_{mi} & X_{mi} + X_{mj} & 1 \\ X_{nj} - X_{ni} & X_{ni} + X_{nj} & 1 \end{vmatrix},$$

$$2a_{13} = \begin{vmatrix} Y_{ki} - Y_{kj} & -(X_{ki}X_{kj} + Y_{ki}Y_{kj}) & 1 \\ Y_{mi} - Y_{mj} & -(X_{mi}X_{mj} + Y_{mi}Y_{mj}) & 1 \\ Y_{ni} - Y_{nj} & -(X_{ni}X_{nj} + Y_{ni}Y_{nj}) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{ki}Y_{kj} - X_{kj}Y_{ki} & X_{ki} + X_{kj} & 1 \\ X_{mi}Y_{mj} - X_{mj}Y_{mi} & X_{mi} + X_{mj} & 1 \\ X_{ni}Y_{nj} - X_{nj}Y_{ni} & X_{ni} + X_{nj} & 1 \end{vmatrix},$$

$$2a_{23} = \begin{vmatrix} X_{kj} - X_{ki} & -(X_{ki}X_{kj} + Y_{ki}Y_{kj}) & 1 \\ X_{mj} - X_{mi} & -(X_{mi}X_{mj} + Y_{mi}Y_{mj}) & 1 \\ X_{nj} - X_{ni} & -(X_{ni}X_{nj} + Y_{ni}Y_{nj}) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{ki}Y_{kj} - X_{kj}Y_{ki} & Y_{ki} + Y_{kj} & 1 \\ X_{mi}Y_{mj} - X_{mj}Y_{mi} & Y_{mi} + Y_{mj} & 1 \\ X_{ni}Y_{nj} - X_{nj}Y_{ni} & Y_{ni} + Y_{nj} & 1 \end{vmatrix}.$$

Les valeurs des coefficients $i$, $j$, $k$, $m$, $n$ pour chaque des dix coniqes sont données dans le tableau 1.

**Tableau 1**

| La conique $(C_{ij})$ | Le pôle $P_{ij}$ situé sur la conique | Les valeurs de | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $i$ | $j$ | $k$ | $m$ | $n$ |
| $(C_{12})$ | $P_{12}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $(C_{13})$ | $P_{13}$ | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 |
| $(C_{14})$ | $P_{14}$ | 1 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| $(C_{15})$ | $P_{15}$ | 1 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| $(C_{23})$ | $P_{23}$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| $(C_{24})$ | $P_{24}$ | 2 | 4 | 5 | 1 | 3 |
| $(C_{25})$ | $P_{25}$ | 2 | 5 | 1 | 3 | 4 |
| $(C_{34})$ | $P_{34}$ | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| $(C_{35})$ | $P_{35}$ | 3 | 5 | 1 | 2 | 4 |
| $(C_{45})$ | $P_{45}$ | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

*Reçue le 5 juillet 1976*

*Institut Polytechnique, Bucharest*
*et*
*Institut Pédagogique, Constantza*

## BIBLIOGRAPHIE

1. Dijksman A. E., *Calculation and Construction of the Burmester Points for Five Positions of a Moving Plane.* Tr. ASME, J. of Engng. Ind., (February 1963).
2. Freudenstein F., Sandor G., *On the Burmester Points of a Plane.* Tr. ASME, J. Appl. Mech., (March 1961).
3. Manolescu N., Kovács Fr., Orănescu A., *Teoria mecanismelor şi a maşinilor.* EDP, Buc., 1970.
4. Manolescu N., Pandrea N., Nica D., *Metoda transformărilor proiective pentru sinteza mecanismelor patrulatere articulate pe calculator.* St. şi cerc. de mec. apl., Ed. Acad. R.S.R., *3* (1975).
5. Perju D., *A New Analitical Method to Establish Points on the Curves of Dimensional Synthesis and to Determine Burmester Points.* International Symposium on Linkages and Computer Design Methods, Bucharest, Romania, June 7–13, 1973.

## O NOUĂ METODĂ PENTRU DETERMINAREA PUNCTELOR LUI BURMESTER CU AJUTORUL CONICELOR LUI HACKMÜLLER

(Rezumat)

Se prezintă o nouă metodă analitică pentru sinteza mecanismelor plane articulate cu patru elemente cinematice. Metoda utilizează proprietăţile conicelor Hackmüler de a trece prin punctele lui Burmester, ceea ce permite ca pentru determinarea conicelor degenerate să se reducă problema la rezolvarea unei ecuaţii de gradul trei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 621-50

# FREQUENCY RESPONSE OF SECOND ORDER SYSTEMS TO AMPLITUDE MODULATED INPUTS

## III. GENERAL HARMONIC MODULATED INPUTS

BY

ALFRED BRAIER, SILVIA NEAGU and GH. SAVITESCU

## 1. Introduction

**1.1.** In [2] and [3] we have studyied by means of the symbolic representation of functions [1], the frequency response of a second order system, with the transfer function

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2zTs + 1} \tag{1}$$

($T > 0$, $z \geq 0$), to the input signals

$$\begin{cases} x_{(i)}(t) = Xe^{\delta t} \sin(pt + \psi) \sin(\omega t + \varphi), \\ x_{(i)}(t) = (Xt + Y)\, e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \end{cases} \tag{2}$$

where $X$, $Y$, $\delta$, $p$, $\omega$, $\psi$ and $\varphi$ are constant quantities.

In this paper we shall study the frequency response of system (1) to inputs

$$x_{(i)}(t) = X\,[1 + \mu \sin(pt + \psi)]\, e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

called [4] oscillation with general harmonic amplitude modulation ($X$, $\delta$, $\mu$, $p$, $\omega$, $\psi$ and $\varphi$ are constant quantities and $p < \omega$).

**1.2.** We have proved [5] that signal (3) can be represented symbolically by the hypercomplex number $\hat{w}$ with the derivation operator $\hat{d}$ (that means to $dx_{(i)}/dt$ corresponds the element $\hat{d}\hat{w}$), where

$$\begin{cases} \hat{w} = z\mathbf{E}_1 + \hat{v}\mathbf{E}_2, & \hat{d} = \hat{d}_1 \mathbf{E}_1 + \hat{d}_2 E_2, \\ \mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_2^2 = \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 = 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} z = a_1 + a_2 \mathrm{j}, \quad \hat{v} = a_3 + a_4 \mathrm{i} + a_5 \mathrm{j} + a_6 \mathrm{ij}, & \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \\ \hat{d}_1 = \delta + \omega \mathrm{j}, \quad \hat{d}_2 = \delta + p\mathrm{i} + \omega \mathrm{j}, & (\mathrm{ij})^2 = (\mathrm{ji})^2 = 1, \end{cases} \tag{5}$$

with

$$(6)\qquad \begin{cases} a_1 = X\cos\varphi, & a_3 = X\mu\cos\psi\cos\varphi, & a_5 = X\mu\cos\psi\sin\varphi, \\ a_2 = X\sin\varphi, & a_4 = X\mu\sin\psi\cos\varphi, & a_6 = X\mu\sin\psi\sin\varphi. \end{cases}$$

Element (6) is a special one, with the components satisfying the relation

$$(7)\qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_5} = \frac{a_4}{a_6}.$$

Reciprocally, to a given element

$$(8)\qquad \hat{w} = (a_1 + a_2\,\mathrm{j})\,\mathrm{E}_1 + (a_3 + a_4\,\mathrm{i} + a_5\,\mathrm{j} + a_6\,\mathrm{ij})\,\mathrm{E}_2,$$

which can be written in the exponential form

$$(9)\qquad \begin{aligned} \hat{w} &= [(X + Y\mathrm{j})\,\mathrm{E}_1 + (U + V\mathrm{ij})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\,\mathrm{E}_2]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \\ &= X(\mathrm{E}_1 + \mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\,\mathrm{E}_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + Y\left(\mathrm{E}_1 + \nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{E}_2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

corresponds the function

$$(10)\qquad \begin{aligned} x(t) = \{ &X[1 + \mu\sin(pt + \psi)]\sin(\omega t + \varphi) + \\ &+ Y[1 + \nu\cos(pt + \psi)]\cos(\omega t + \varphi)\}\,\mathrm{e}^{\delta t}, \end{aligned}$$

where

$$(11)\qquad \begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{a_5 U + a_4 V}{a_3 U - a_6 V}, \quad \tan\psi = \dfrac{a_4 U + a_5 V}{a_3 U - a_6 V}, \\ U, V = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(a_3 + a_6)^2 + (a_4 - a_5)^2} \pm \sqrt{(a_3 - a_6)^2 + (a_4 + a_5)^2}\right], \\ X = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi, \quad Y = -a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi \end{cases}$$

and also

$$(12)\qquad \mu = \frac{U}{X}, \qquad \nu = \frac{V}{Y}.$$

If $\hat{w}$ is a special element (i.e. verifies (7)), then $Y = 0$; the exponential form (9) is much more simple and the function representable is (3), where

$$(13)\qquad \begin{aligned} X &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \mu = \frac{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}{|a_1|}\left(= \frac{\sqrt{a_5^2 + a_6^2}}{|a_2|}\right), \\ \tan\varphi &= \frac{a_2}{a_1}, \qquad \tan\psi = \frac{a_4}{a_3}\left(= \frac{a_6}{a_5}\right). \end{aligned}$$

The divisors of zero in algebra (4), (5) are characterized by

$$(14)\qquad a_3 - a_6 = 0, \quad a_4 + a_5 = 0 \quad \text{or} \quad a_3 + a_6 = 0, \quad a_4 - a_5 = 0,$$

and correspond to

$$(15)\qquad x(t) = \{A\sin(\omega t + \varphi) \pm B\cos[(\omega \pm p)t + (\psi \mp \varphi)]\}\,\mathrm{e}^{\delta t},$$

where

$$(16)\qquad \begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad B = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\varphi = \dfrac{a_2}{a_1}, \\ \tan(\psi \mp \varphi) = \dfrac{b}{a}, \quad a = a_3 = \pm a_6, \quad b = a_4 = \mp a_5. \end{cases}$$

The inverse of (8) is

$$(17)\qquad \frac{1}{\hat{w}} = \left(\frac{X - Yj}{X^2 + Y^2} E_1 + \frac{U - Vij}{U^2 - V^2} e^{-i\psi} E_2\right) e^{-j\varphi}.$$

## 2. Steady-State Response of Second Order Systems to General Harmonic Amplitude Modulated Inputs

**2.1.** Let introduce the derivation operator $(4_2)$ instead of $s$ in the transfer function (1). We get the transferance [5]

$$(18)\qquad \hat{W}(\hat{d}) = \frac{1}{T^2\hat{d}^2 + 2zT\hat{d} + d^0}\left(= \frac{1}{\hat{K}}\right),$$

where $\hat{d}^0 = E_1 + E_2$ is the unity element. The components of $\hat{K}$ result finally

$$(19)\qquad \begin{cases} k_1 = T^2(\delta^2 - \omega^2) + 2zT\delta + 1, & k_2 = k_5 = 2T\omega(T\delta + z) \\ k_3 = T^2(\delta^2 - \omega^2 - p^2) + 2zT\delta + 1, & \\ k_4 = 2Tp(T\delta + z), & k_6 = 2T^2\omega p. \end{cases}$$

The conditions (7) that $\hat{K}$ (and also $\hat{W}$) be a special element, give

$$(20)\qquad \begin{cases} T^2(\omega^2 + p^2) = 1 - z^2 - (T\delta + z)^2, \\ p^2 \ll |\delta^2 - \omega^2|. \end{cases}$$

Also, $\hat{K}$ is divisor of zero (14) if

$$(21)\qquad T\delta = -z, \quad \omega \pm p = \frac{1}{T}\sqrt{1 - z^2}.$$

Conditions (20) or (21) can take place only at second order systems having $z < 1$.

**2.2.** If $\hat{X}_{(i)}$ is the hypercomplex number attached to the input (3) and $\hat{X}_{(o)}$ — that attached to the output signal from the second order system, then

$$(22)\qquad \hat{X}_{(o)} = \hat{W}(\hat{d})\,\hat{X}_{(i)}.$$

In general, an input of type (3) produces a distorsionated output (10) since $\hat{W}$ is in general an arbitrary hypercomplex number. Only if (20) take place, the steady-state output has the same form, described by (3).

In the particular case (21), the transferance denominator is divisor of zero, that means resonance with infinite values of the response.

By means of (11) and (19) we get the exponential form (9) of $\hat{K}$, and then (see (17)) of $\hat{W}$,

$$\hat{W} = [(W_1 + W_2 \mathrm{j})\,\mathrm{E}_1 + (W_3 + W_4 \mathrm{ij})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi}\,\mathrm{E}_2]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Phi}. \tag{23}$$

The quantities

$$W_1 = \frac{K_1}{K_1^2 + K_2^2}, \quad W_2 = -\frac{K_2}{K_1^2 + K_2^2}, \quad W_3 = \frac{K_3}{K_3^2 - K_4^2}, \quad W_4 = \frac{K_4}{K_3^2 - K_4^2},$$

and $\Psi$, $\Phi$ are to be calculated by applying formulae (11), (12) to $\hat{K}$ given by (19) (obviously, $X \to K_1$, $Y \to K_2$, $U \to K_3$, $V \to K_4$, $\psi \to \Psi$, $\varphi \to \Phi$). We get

$$\left\{\begin{aligned}
&\tan\Phi = \frac{2T\,(T\delta + z)\,[(\omega + p)\,M \pm (\omega - p)\,N]}{(T^2\delta^2 + 2T\delta z + 1)\,(M + N) - T^2\,[(\omega + p)^2\,M + (\omega - p)^2\,N]},\\
&\tan\Psi\\
&W_1 = \frac{[T^2(\delta^2 - \omega^2) + 2T\delta z + 1]\cos\Phi + 2T\omega\,(T\delta + z)\sin\Phi}{[T^2(\delta^2 - \omega^2) + 2T\delta z + 1]^2 + 4T^2\omega^2\,(T\delta + z)^2},\\
&W_2 = \frac{2T\omega\,(T\delta + z)\cos\Phi - [T^2(\delta^2 - \omega^2) + 2T\delta z + 1]\sin\Phi}{[T^2(\delta^2 - \omega^2) + 2T\delta z + 1]^2 + 4T^2\omega^2\,(T\delta + z)^2},\\
&W_3, W_4 = \frac{1}{2}\,\frac{M \pm N}{MN}, \qquad \text{where}\\
&M,\ N = \sqrt{\{T^2\,[\delta^2 - (\omega \pm p)^2] + 2T\delta z + 1\}^2 + 4T^2\,(T\delta + z)^2\,(\omega \mp p)^2}
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

**2.3.** The hypercomplex number $\hat{X}_{(o)}$ (22) attached to the steady-state output produced by (3) is obtained by multiplying ($9_2$) (where $Y = 0$) by (23), which gives

$$\hat{X}_{(o)} = [(XW_1 + XW_2 \mathrm{j})\,\mathrm{E}_1 + (X\mu W_3 + X\mu W_4 \mathrm{ij})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi - \Psi)}\,\mathrm{E}_2]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi - \Phi)}. \tag{25}$$

The above mentioned correspondence between (9) and (10) gives the dependence on the time of the response, represented symbolically by (25), namely

$$\begin{aligned} x_{(o)}(t) = {} & \{XW_1\,[1 + \mu_1 \sin(pt + \psi - \Psi)]\sin(\omega t + \varphi - \Phi) + \\ & + XW_2\,[1 + \mu_2 \cos(pt + \psi - \Psi)]\cos(\omega t + \varphi - \Phi)\}\,\mathrm{e}^{\delta t}, \end{aligned} \tag{26}$$

where

$$\mu_1 = \mu\,\frac{W_3}{W_1}, \qquad \mu_2 = \mu\,\frac{W_4}{W_2}. \tag{27}$$

The term in (26) characterized by $XW_1$ is to be called „main component", while the other is the „distorsion component".

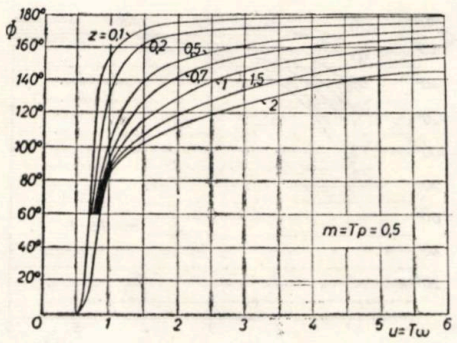



Fig. 1

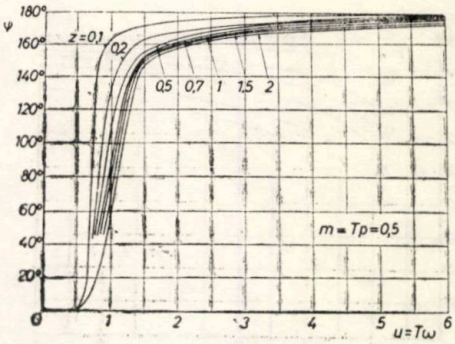



Fig. 2

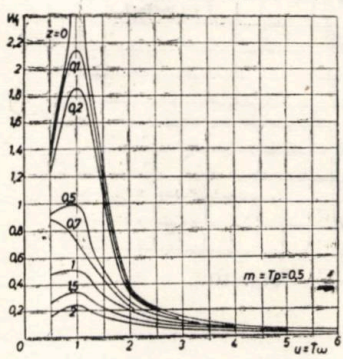



Fig. 3

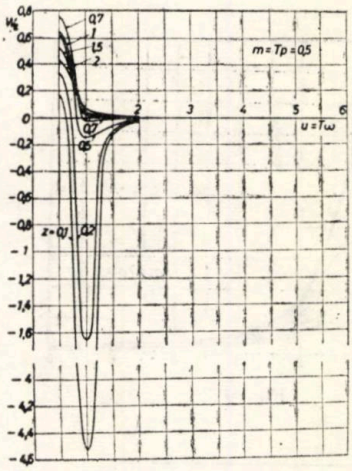



Fig. 4

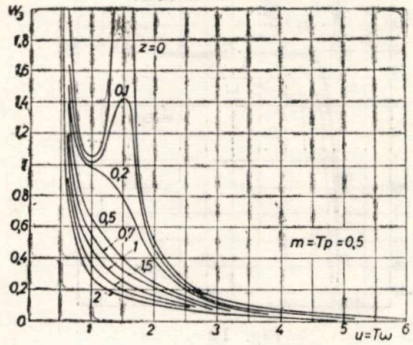



Fig. 5

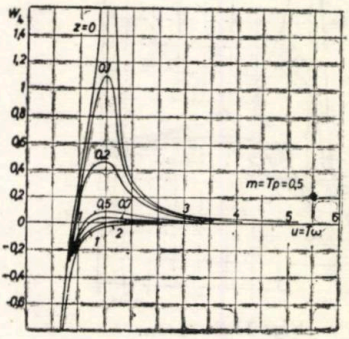



Fig. 6

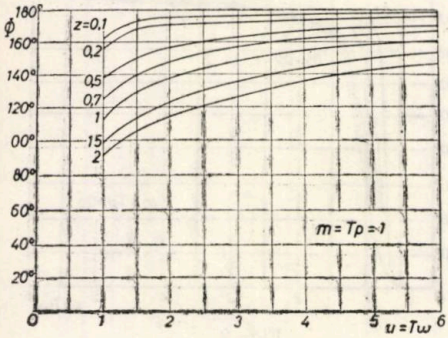



Fig. 7

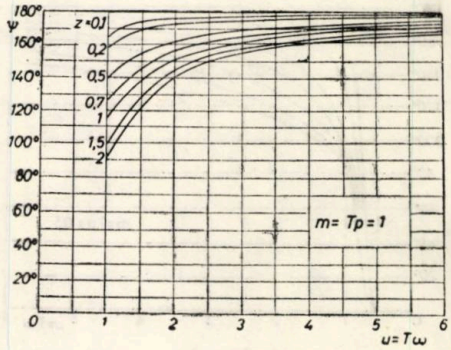



Fig. 8

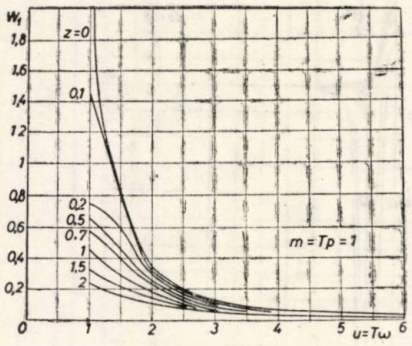



Fig. 9

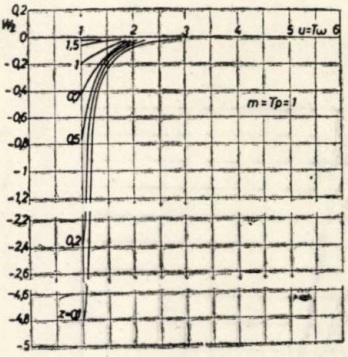



Fig. 10

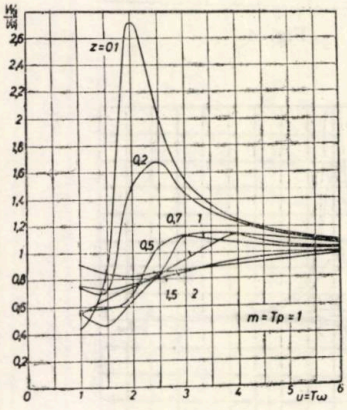



Fig. 11

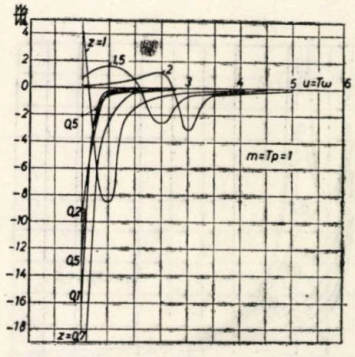



Fig. 12

Remarks. i) The important signal

$$x(t) = X[1 + \mu \sin(pt + \psi)] \sin(\omega t + \varphi) \tag{28}$$

corresponds to $\delta = 0$ in the general results (25).

ii) If the atenuation constant $\delta$ and the system time constant satisfy the relation $1 + T\delta = 0$, i. e.

$$\delta = -\frac{1}{T}, \tag{29}$$

the results (24) become much more simple.

### 3. The Frequency Response

We introduce now the reduced (dimensionless) parameters

$$\lambda = T\delta, \quad m = Tp, \quad u = T\omega, \tag{30}$$

called respectively *reduced atenuation*, *reduced modulated frequency* and *reduced frequency*. Using (24) we obtain the two phase angles ($\Psi$ and $\Phi$), the two ratios of output amplitude to input amplitude ($W_1$ and $W_2$) as well as the two ratios of output degree of modulation to the input degree ($W_3/W_1$ and $W_4/W_2$).

The plot of $\Psi$, $\Phi$, $W_1$, $W_2$, $W_3/W_1 (= \mu_1/\mu)$ and $W_4/W_3 (= \mu_2/\mu)$ vs. $u$, for given $\lambda$ and different values of $m$ leads to *new amplitude and phase response curves* of a second order system, submitted to inputs (3). We shall restrict only to the important signal (28), with $\delta = 0$ (i. e. $\lambda = 0$). Then

$$\begin{cases} \dfrac{\tan\Phi}{\tan\Psi} = \dfrac{2z[(u+m)M \pm (u-m)N]}{[1-(u+m)^2]M + [1-(u-m)^2]N}, \\ W_1 = \dfrac{(1-u^2)\cos\Phi + 2zu\sin\Phi}{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2}, \qquad W_3,\ W_4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{M \pm N}{MN}, \\ W_2 = \dfrac{2zu\cos\Phi - (1-u^2)\sin\Phi}{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2}, \quad M, N = \sqrt{[1-(u\pm m)^2]^2 + 4z^2(u \mp m)^2}. \end{cases} \tag{31}$$

Some of the curves are given in Figs. 1... 12.

### 4. Conclusion

1. The symbolic representation of the general harmonic amplitude modulated input (3) by the hypercomplex number $\hat{w}$ with the derivation operator (4) is utilised in order to study completely the steady-state response of a second order system.

2. The steady-state response presents in general distorsion, having the dependence on time given by (26), where the quantities involved are ex-

pressed by (24) and (27). The distorsion becomes negligible when conditions (20) are verified.

3. New frequency response curves are drawn for a second order system when the input signal is (28).

*Received August 1, 1976*

*Polytechnic Institute, Jassy,*
*Department of Mechanics*

## REFERENCES

1. Braier A., *New Algebraic Method in Dynamic Systems.* Int. Centre for Mech. Sci., Udine, 1972, 126 p.
2. Braier A., Neagu S., *Frequency Response of Second Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (I) *Simple Harmonic Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, XVIII (XXII), *3—4*, s. IV, 29—40 (1972).
3. Braier A., Neagu S., *Frequency Response of Second Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (II) *Linear Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, XIX (XXIII), *1—2*, s. IV, 9—18 (1973).
4. Braier A., *Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (III) *General Harmonic Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, XVII (XXI), *3—4*, s. IV, 19—28 (1971).
5. Braier A., *The Transferance of a System.* Bul. Inst. polit. Iași, XV (XIX), *3—4*, s. I, 59—68 (1969).

## RĂSPUNSUL FRECVENȚIAL AL SISTEMELOR DE ORDINUL DOI LA INTRĂRI MODULATE ÎN AMPLITUDINE

### III. Intrări cu modulație armonică generală

(Rezumat)

Se utilizează reprezentarea simbolică a semnalului modulat (3) prin numărul hipercomplex (4) pentru a studia răspunsul de regim permanent al unui sistem de ordinul doi la acțiunea unui astfel de semnal, aplicat la intrare. Dacă condițiile (20) sînt satisfăcute răspunsul nu prezintă distorsiuni. În general el are forma (26) cu (24) și (27).

În fig. 1...12 se dau noi caracteristici de frecvență pentru răspunsul sistemelor de ordinul doi la intrări de tipul (28).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 534.01

# THE STUDY OF TRANSVERSE, TORSIONAL, LONGITUDINAL NON-DISSIPATIVE AND DISSIPATIVE VIBRATIONS OF STRAIGHT BARS

BY

ILIE N. CONSTANTINESCU and RADU CIPRIAN BOLOG CÎRJA

Studying the nondissipative vibrations of straight bars with continuous variable section and the dissipative vibrations of straight bars, the paper present, mainly, the solution of the problem of eigenvalues of a linear differential operator, positive and self-adjoint, defined on the Hilbert space of the real functions that meet the conditions at the limit imposed, space on which a scalar product is defined and therefore a norm in the form of an integral with weight function, essential problem in the study of these vibrations.

Thus, searching for the equation of free longitudinal nondissipative vibrations

$$\frac{1}{A(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial V}{\partial x}\right]-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1}$$

that should be solved for the initial conditions

$$V(x,0)=V_0(t), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0}=V_0(x) \tag{2}$$

and the conditions at the limit

$$V(x,t)=0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_1(x_1=0,1)}=0 \quad \begin{matrix}\text{for } x=x_1 \text{ fixed marginal point}\\ \text{for } x=x_1 \text{ free marginal point}\end{matrix} \tag{3}$$

a solution of the form:

$$V(x,t)=BU(x)\sin(\omega t+\varphi), \tag{4}$$

we come to the eigenvalue problem:

$$H\,.\,U=\lambda U \tag{5}$$

with the conditions:

$$U(x_1) = 0 \qquad \text{for } x = x_1 \text{ fixed marginal point}$$

$$x_1 = 0, 1 \tag{6}$$

$$U'(x_1) = 0 \qquad \text{for } x = x_1 \text{ free marginal point}$$

where

$$H = -\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{A'}{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7}$$

$$\lambda = a^2\,\omega^2. \tag{8}$$

We consider as Hilbert space the set of all the functions $U(x)$ that meet the conditions (6) defining the scalar product of the elements $U$ and $V$ of the space through the relations :

$$< U, V > = \int_1^0 A(x)\,U(x)\,V(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

The operator $H$, being evidently linear, and also positive and self-adjoint, it has a line of eigenvalues $\lambda_k\,(k = 1, 2, \ldots)$ corresponding to the orthogonal eigenfunctions $U_k(x)$, that can be normalized.

For each of the conditions :

$$U(0) = U(1) = 0; \quad U(0) = U'(1) = 0; \quad U'(0) = U'(1) = 0 \tag{10}$$

obtained from (6), the operator $H^{(0)} = -\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ has a set of eigenvalues $\lambda_{0k}$ and eigenfunctions $U_{0k}$ orthonormal, but in another Hilbert space, namely the space of the real functions that meet the conditions (6), but on which the scalar product is defined by

$$\{ U, V \} = \int_0^1 UV\mathrm{d}x.$$

Searching for another operator that should contain the operator $H^{(0)}$ and should have orthogonal eigenvalues in the initial Hilbert space, we consider the functions $U_k$ of the form :

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{A}}\,U_{0k}, \tag{11}$$

with which we obtain the operator :

$$H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{A'}{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2A}\left(\frac{A'}{2} - A''\right)I, \tag{12}$$

with eigenfunctions and eigenvalues

$$U_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{A}} U_{0k}, \quad \lambda_k = \lambda_{0k}, \tag{13}$$

where $U_{0k}$ and $\lambda_{0k}$ are eigenfunctions and eigenvalues of the operator $H^{(0)}$.

Operator (7) expressed in the form :

$$H = \underbrace{-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{A'}{A}\frac{d}{dx} - \left[\frac{1}{2A}\left(\frac{A'^2}{2} - A''\right) - \beta\right] I}_{H^{(0)}} + \tag{14}$$

$$+ \underbrace{\left[\beta - \frac{1}{2A}\left(\frac{A'^2}{2} - A''\right)\right] I}_{H'}$$

will contain the operator $H^{(0)}$ having eigenfunctions and eigenvalues :

$$U_i^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{A}} U_{0i}, \; ; \quad \lambda_i^{(0)} = \lambda_{0i} - \beta, \quad (i = 1, 2, ...) \tag{15}$$

and the operator $H'$ nondifferential, self-adjoint and positive for

$$\beta \geqslant \beta_m = \max\left\{\frac{1}{2A}\left(\frac{A'^2}{2} - A''\right)\right\}, \quad x \in [0, 1]. \tag{16}$$

Thus we can determine the repper limits of the values $\hat{\lambda}_k^{(n)}$ of $\lambda_k$ of the operator (7) by means of the relation :

$$| < U_i , H . U_j > - \hat{\lambda}\delta_{ij} | = 0, \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{17}$$

in which we choose as a set orthonormal functions $\{ U_i \}^n$ the first $n$ eigenfunctions $\{ U_i^{(0)} \}$ given by the relation (15) of the primal problem therefore :

$$| < U_i^{(0)}, HU_j^{(0)} > - \hat{\lambda}^{(n)} \delta_{ij} | = 0. \tag{18}$$

Taking into account the improvement brought by B a z e l y to the method of the first projection, the problem of the lower limit of the eigenvalue is then solved, determining $\lambda_1^{(1)}$ according to the relation :

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + \frac{1}{< P_1, U_1^{(0)} >} = \lambda_{01} - \beta + \left[\int_0^1 \frac{U_{01}^2}{\beta - \frac{1}{2A}\left(\frac{A'^2}{2} - A''\right)} dx\right]^{-1}, \tag{19}$$

where

$$P_i = (H')^{-1} U_i^{(0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{A}} U_{0i}}{\beta - \frac{1}{2A}\left(\frac{A'^2}{2} - A''\right)} \tag{20}$$

and $\beta$ is the root of the equation :

$$(21) \qquad \int_0^1 \frac{U_{01}^2}{\beta - \frac{1}{2A}\left(\frac{A'^2}{2} - A''\right)} \, dx - \frac{1}{\lambda_{02} - \lambda_{91}} = 0,$$

resulting $\lambda_1^{(1)}$ of the form

$$(22) \qquad \lambda_1^{(1)} = \begin{cases} \lambda_{02} - \beta_1, & \beta_1 \geqslant \beta_m, \\ \lambda_{02} - \beta_m, & \beta_1 < \beta_m. \end{cases}$$

Thus solving the problem of eigenvalues, the problem of the free and forced vibrations can be solved easily, by the known methods of the theory of differential equations. The general solutions of the equation (1) will be of the form :

$$(23) \qquad V(x, t) = \sum_k B_k U_k(x) \sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

in which $B_k$ and $\varphi_k$ are determined from the initial conditions (2), and the solution of the forced vibration equation, with the free member $F(x,t)$ will be shought of the form :

$$(24) \qquad V(x, t) = \sum_k U_k(x) T_k(x),$$

in which $U_k(x)$ are the eigenvalues of the operator $H$, and $T_k(x)$ is determined imposing that the solution (24) should verify the respective equation.

The equations of the forced and free transverse and torsional vibration are studied analogously.

In the case of dissipative vibrations of straight bars, taking into account the dissipation of energy through external and internal friction we also consider as compared to the case of non-dissipative vibrations that on the element of mass $dm$ of the bar an external friction is acting on, opposed to the speed of the form :

$$(25) \qquad dF = \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial t} \, dm,$$

in which $U$ is the displacement of the section of abscissa $x$ of the bar and $\alpha_1$ a coefficient determined experimentally, replacing at the same time the elasticity moduluses $E$ and $G$ by the operators

$$(26) \qquad E_d = E\left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad G_d = E\left(1 + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

in order to take also into account the existence of the interior friction in the bar material.

The differential equations of dissipative vibrations are established applying the principle of the dynamic equilibrum of the bar element. Their solution is reduced to a problem of eigenvalues identical to that obtained in the study of longitudinal nondissipative vibrations.

*Received March 30, 1976*

*Mining Institute, Petroshani*

## REFERENCES

1. * * * *Труды международного симпозиума по нелинеиным колебаниям*. T. 1, *Аналитические методы*, Акад. Наук СССР, Киев, 1963.
2. Cristescu R., *Analiză funcțională*. EDP, Buc., 1965.
3. Gould S.. H., *Variational Methods for Eigenvalue Problems*. Univ. of Toronto Press, Canada, 1971.
4. Hamburger L., Buzdugan G., *Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția mașinilor*. Ed. tehn., Buc., 1958.
5. Harris C. M., Crede C. E., *Șocuri și vibrații*. Vol. I (trad. din l. engleză), Ed. tehn., Buc., 1968.
6. Mișicu M., *Mecanica mediilor deformabile*. Ed. Acad. RSR, Buc., 1967.
7. Weinstein A., *Bounds for Eigenvalues and the Method of Intermediate Problems*. Univ. of Wisconsin Press, Maddison, Wis., U.S.A., 1961.

## STUDIUL VIBRAȚIILOR NEDISIPATIVE ȘI DISIPATIVE LONGITUDINALE, TORSIONALE ȘI TRANSVERSALE ALE BARELOR DREPTE

(Rezumat)

Lucrarea prezintă rezolvarea problemei de valori proprii la care conduce studiul vibrațiilor nedisipative și disipative ale barelor drepte, prin metoda Rayleigh-Ritz și metoda primei proiecții cu unele îmbunătățiri aduse de Bazley.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 539.3

# FINITE THERMOELASTIC DEFORMATIONS OF AN ALMOST INCOMPRESSIBLE ELASTIC SOLID

BY

ELISABETA RUSU

## 1. Introduction

A. J. Spencer [1] considers the problem of an almost incompressible elastic solid. In this Note we study the same problem in thermoelasticity. The theory is illustrated by an application.

## 2. Constitutive Equations for Almost Incompressible Bodies

The notation adopted is that for [2]. A homogeneous isotropic thermoelastic body with Helmholtz's free energy function $\sigma$ is denoted by $B_0$ in tis undeformed state, and $B$ in its finitely deformed state. Let be $\theta^i$ a curvilinear coordinates system.

We consider the material for which [3]:

$$(1)\quad \sigma = \sigma(T, I_1, I_2, I_3), \quad C_s = C_s(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6), \quad (s = 1, \ldots, 6)$$

where the invariants are given by [2]:

$$(2)\quad I_1 = g^{ij} G_{ij}, \quad I_2 = g_{ij} G^{ij} I_3, \quad I_3 = \frac{G}{g}, \quad I_4 = T\,|^i\, T\,|_i,$$
$$I_5 = T\,|^i\, T\,|_j\, \gamma^j_i, \quad I_6 = T\,|^i\, T\,|_j\, \gamma^j_k \gamma^k_i,$$

where

$$(3)\quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}), \quad T\gamma^i_j = g^{ik}\gamma_{kj},$$

and

$$(4)\quad T\,|_j = \frac{\partial T}{\partial \theta^j}, \quad T\,|^j = g^{jk} T\,|_k.$$

As usual the set of the constitutive equations may be written as:

$$\tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi B^{ij} + pG^{ij}, \quad \text{or} \quad s^{ij} = \tau^{ij}\sqrt{I_3},$$

$$-Q^i = (C_1\,\delta^i_j + C_2\,\gamma^i_j + C_3\,\gamma^i_k\,\gamma^k_j)\,T\,|^j + {}_0\varepsilon^{ijk}T\,|_r\,T|_s\,\gamma^r_t\,(C_4\,\delta^s_j\,\delta^t_k + \tag{5}$$
$$+ C_5\,\delta^s_j\,\gamma^t_k + C_6\,\gamma^s_j\,\gamma^t_k),$$

where

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\frac{\partial\sigma}{\partial I_1}, \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\frac{\partial\tau}{\partial I_2}, \quad p = 2\sqrt{I_3}\,\frac{\partial\sigma}{\partial I_3}, \tag{6}$$

$$B^{ij} = I_1\,g^{ij} - g^{ir}\,g^{js}\,G_{rs}, \quad {}_0\varepsilon^{ijk} = \frac{e_{ijk}}{\sqrt{g}}.$$

The equations of equilibrium and the energy equation are

$$\tau^{ij}\|_j = 0, \quad Q^i\|_i = 0. \tag{7}$$

When the material is only slightly compressible, we suppose that $\sigma$ and $C_s$ can be expanded as series of powers of $I_3 - 1$, with coefficients which are functions of $T$, $I_1$, $I_2$ and $I_1, I_2, I_4, I_5, I_6$ respectively:

$$\sigma(T, I_1, I_2, I_3) = \sigma_0(T, I_1, I_2) + (I_3 - 1)\,\sigma_1(T, I_1, I_2) + \tag{8}$$
$$+ (I_3 - 1)^2\,\sigma_2(T, I_1, I_2) + \ldots,$$

$$C_s(I_1, \ldots, I_6) = C^0_s(I_1, I_2, I_4, I_5, I_6) + (I_3 - 1)\,C^1_s(I_1, I_2, I_4, I_5, I_6) + \tag{9}$$
$$+ (I_3 - 1)^2\,C^2_s(I_1, I_2, I_4, I_5, I_6) + \ldots \quad (s = 1, \ldots, 6).$$

Then the scalar functions $\Psi$, $\Phi$, $p$ are:

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\left\{\frac{\partial\sigma_0}{\partial I_1} + (I_3 - 1)\,\frac{\partial\sigma_1}{\partial I_1} + (I_3 - 1)^2\,\frac{\partial\sigma_2}{\partial I_1} + \ldots\right\},$$

$$\Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\left\{\frac{\partial\sigma_0}{\partial I_2} + (I_3 - 1)\,\frac{\partial\sigma_1}{\partial I_2} + (I_3 - 1)^2\,\frac{\partial\sigma_2}{\partial I_2} + \ldots\right\}, \tag{10}$$

$$p = 2\sqrt{I_3}\,[\sigma_1 + 2\,(I_3 - 1)\,\sigma_2 + 3(I_3 - 1)^2\,\sigma_3 + \ldots\}.$$

Thus, $s^{ij}$ becomes:

$$s^{ij} = \Phi_0\,g^{ij} + \Psi_0\,B^{ij} + 2I_3\,\sigma_1\,G^{ij} + (I_3 - 1)(\Phi_1\,g^{ij} + \Psi_1\,B^{ij} + 4I_3\,\sigma_2\,G^{ij}) + \tag{11}$$
$$+ (I_3 - 1)^2\,(\Phi_2\,g^{ij} + \Psi_2\,B^{ij} + 6I_3\,\sigma_3\,G^{ij}),$$

where

$$\Phi_k = 2\,\frac{\partial\sigma_k}{\partial I_1}, \quad \Psi_k = 2\,\frac{\partial\sigma_k}{\partial I_2}, \quad (k = 0, 1, 2) \tag{12}$$

and $Q^i$ are:

$$-Q^i = [C^0_1\,\delta^i_j + C^0_2\,\gamma^i_j + C^0_3\,\gamma^i_m\,\gamma^m_j]\,T\,|^j + {}_0\varepsilon^{ijk}\,T\,|_r\,T\,|_s\,\gamma^r_t\,(C^0_4\,\delta^s_j\,\delta^i_k +$$
$$+ C^0_5\,\delta^s_j\,\gamma^t_k + C^0_6\,\gamma^s_j\,\gamma^t_k) + (I_3 - 1)\,\{(C^1_1\,\delta^i_j + C^1_2\,\gamma^i_j + C^1_3\,\gamma^i_m\,\gamma^m_j)\,T\,|^j + \tag{13}$$
$$+ {}_0\varepsilon^{ijk}\,T\,|_r\,T\,|_s\,\gamma^r_t\,(C^1_4\,\delta^s_j\,\delta^i_k + C^1_5\,\delta^s_j\,\gamma^t_k + C^1_6\,\gamma^s_j\,\gamma^t_k)\} + (I_3 - 1)^2\{C^2_1\,\delta^i_j + \ldots\}.$$

Now we consider the behavior of $\sigma$ in the limiting proces as the material tends to an incompressible one. Like in [1], we deduce that when $I_3 \to 1$, $2I_3\sigma_1 + 4I_3(I_3-1)\sigma_2$ becomes the arbitrary hydrostatic pressure $p$. If we suppose [1] that the material is not incompressible but $I_3 - 1$ is a small quantity of order $\varepsilon$ whose square may be neglected, then we deduce that $\sigma_2 = \varepsilon^{-1}\sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)}$, where $\sigma_2^{(1)}$ and $\sigma_2^{(2)}$ are of the same order of magnitude as $\sigma_1$, and the same for $\sigma_3$. Then we have

$$\sigma=\sigma_0+(I_3-1)\sigma_1+\varepsilon^{-1}(I_3-1)^2\sigma_2^{(1)}+(I_3-1)^2\sigma_2^{(2)}+\varepsilon^{-1}(I_3-1)^2\sigma_3^{(1)}+\ldots, \tag{14}$$

which give rise to stress components of zero and first order in $\varepsilon$:

$$\begin{aligned} s^{ik} &= \Phi_0 g^{ik} + \Psi_0 B^{ik} + I_3[2\sigma_1 + 4\varepsilon^{-1}(I_3-1)\sigma_2^{(1)}]G^{ik} + \\ &+ (I_3-1)\{[\Phi_1+\varepsilon^{-1}(I_3-1)\Phi_2^{(1)}]g^{ik}+[\Psi_1+\varepsilon^{-1}(I_3-1)\Psi_2^{(1)}]B^{ik}+ \\ &+ I_3[4\sigma_2^{(2)} + G\varepsilon^{-1}(I_3-1)\sigma_3^{(1)}]G^{ik}\}, \end{aligned} \tag{15}$$

where

$$\Phi_2^{(1)} = 2\frac{\partial\sigma_2^{(1)}}{\partial I_1}, \quad \Psi_2^{(1)} = 2\frac{\partial\sigma_2^{(1)}}{\partial I_2}. \tag{16}$$

In (13) we will retain only the first two terms.

## 3. Perturbation Method for Almost Incompressible Thermoelastic Bodies

Consider first a body, denoted by $B_0$ in its undeformed state, of incompressibe isotropic thermoelastic material, with the free energy function $\sigma = \sigma_0(T, I_1, I_2)$ and $C_s = C_s^0(I_1, I_2, I_4, I_5, I_6)$. This body deforms into a body $B$, with displacement vector $v$ and the temperature $T$, which is in equilibrium. We suppose that the state $B$ is completely known:

$$s^{ik} = \Phi_0 g^{ik} + \Psi_0 B^{ik} + p_0 G^{ik}, \qquad \Phi_0 = 2\frac{\partial\sigma_0}{\partial I_1}, \quad \Psi_0 = 2\frac{\partial\sigma_0}{\partial I_2}; \tag{17}$$

$p_0$ is a known function, and

$$\begin{aligned} -Q^i = &(C_1^0\delta_j^i + C_2^0\gamma_j^i + C_3^0\gamma_k^i\gamma_j^k)\,T\big|^j + {}_0\varepsilon^{ijk}\,T\big|_r\,T\big|_s\,\gamma_t^r(C_4^0\delta_j^s\delta_k^t + \\ &+ C_5^0\delta_j^s\gamma_k^t + C_6^0\gamma_j^s\gamma_k^t). \end{aligned} \tag{18}$$

Now we consider that the body $B_0$ is no longer incompressible but is of almost incompressible material with the free energy function $\sigma$ and the $C_s$ functions given by (14) and (9). We seek equilibrium configurations, in which the body $B_0$ is deformed into a body $B'$, the displacement vector and temperature being of the form:

$$\bar{v}(\theta^t) + \varepsilon\bar{w}(\theta^t) + \varepsilon^2 u''(\theta^t), \qquad T(\theta^t) + \varepsilon T'(\theta^t) + \varepsilon^2 T''(\theta^t). \tag{19}$$

The effect on the above $B$, of replacing the function $\sigma_0$ by the function $\sigma$, and the $C_s^0$ functions by $C_s$, is the considered; this results in a further small deformation of the body $B$ to a body $B'$.

The problem of small deformation superposed on a large deformation in thermoelasticity is considered in [5], [6], [7], [8]; it has been obtained a expression for $Q^i$ only in the case when the large deformation is at the constante temperature. From (19) we have [1], [9]

$$\bar{G}'_i = \bar{w}_{,i} = w_m \|_i \bar{G}^m, \quad 2\gamma'_{ij} = G'_{ij} = w_i \|_j + w_j \|_i, \quad \gamma'^i_j = g^{ik}\gamma'_{kj},$$

$$G'^{ij} = -G^{ir} G^{js} G'_{rs}, \quad I'_1 = g^{rs} G'_{rs}, \quad I'_2 = g_{rs} G'^{rs} + g_{rs} G^{rs} I'_3, \tag{20}$$

$$I'_3 = 2w^r \|_r, \quad I''_3 = 2w^r \|_r w^s \|_s - w^r \|_s w^s \|_r + 2u''^r \|_r.$$

For $I'_4, I'_5, I'_6$ we obtain the following expressions:

$$I'_4 = T' \,|^i\, T \,|_i + T \,|^i\, T' \,|_i, \quad I'_5 = (T'^i\, T \,|_j + T \,|^i\, T' \,|_j)\,\gamma^j_i + T \,|^i\, T \,|_j\, \gamma'^j_i, \tag{21}$$

$$I'_6 = (T' \,|^i\, T \,|_j + T \,|^i\, T' \,|_j)\,\gamma^j_k \gamma^k_i + T \,|^i\, T \,|_j\, (\gamma^j_k \gamma'^k_i + \gamma'^j_k \gamma^k_i).$$

In the body $B'$ the tensor $B^{ik}$ becomes, to order $\varepsilon$, $B^{ik} + \varepsilon B'^{ik}$,

$$B'^{ij} = (g^{ij} g^{rs} - g^{ir} g^{js})\, G'_{rs}. \tag{22}$$

The scalar functions $\sigma_1$, $\sigma_2^{(1)}$, $\Phi_0$, $\Psi_0$ in $B'$ are functions of $T + \varepsilon T'$, $I_1 + \varepsilon I'_1$, $I_2 + \varepsilon I'_2$, and we have

$$\sigma_1(T+\varepsilon T',\ I_1+\varepsilon I'_1,\ I_2+\varepsilon I'_2) = \sigma_1(T, I_1, I_2) + \frac{\varepsilon}{2}(\chi_1 T' + \Phi_1 I'_1 + \Psi_1 I'_2),$$

$$\sigma_2^{(1)}(T+\varepsilon T',\ I_1+\varepsilon I'_1,\ I_2+\varepsilon I'_2) = \sigma_2^{(1)}(T, I_1, I_2) + \frac{\varepsilon}{2}(\chi_2 T' + \Phi_2^{(1)} I'_1 + \Psi_2^{(1)} I'_2), \tag{23}$$

$$\Phi_0(T+\varepsilon T', I_1+\varepsilon I'_1,\ I_2+\varepsilon I'_2) = \Phi_0(T, I_1, I_2) + \varepsilon[LT' + A_0 I'_1 + F_0 I'_2] + \ldots,$$

$$\Psi_0(T+\varepsilon T', I_1+\varepsilon I'_1,\ I_2+\varepsilon I'_2) = \Psi_0(T, I_1, I_2) + \varepsilon[MT' + F_0 I'_1 + B_0 I'_2] + \ldots,$$

where

$$\chi_1 = \frac{2\partial\sigma_1}{\partial T}, \quad \chi_2 = \frac{2\partial\sigma_2^{(1)}}{\partial T}, \quad L = \frac{\partial\Phi_0}{\partial T}, \quad M = \frac{\partial\Psi_0}{\partial T},$$

$$A_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_1}, \quad B_0 = \frac{\partial\Psi_0}{\partial I_2}, \quad F_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_2} = \frac{\partial\Psi_0}{\partial I_1}. \tag{24}$$

We have also

$$C^k_s(I_1 + \varepsilon I'_1, I_2 + \varepsilon I'_2, I_4 + \varepsilon I'_4, I_5 + \varepsilon I'_5, I_6 + \varepsilon I'_6) = C^k_s(I_1, I_2, I_4, I_5, I_6) + \varepsilon C^k_{sr} I'_r, \tag{25}$$

$$C^k_{sr} = \frac{\partial C^k_s}{\partial I_r}, \quad (k = 0, 1;\ s = 1, 2, \ldots, 6,\ r = 1, 2, 3, 5, 6). \tag{26}$$

To first order in $\varepsilon$, the stress tensor in $B'$, reffered to coordinates $\theta_i$ in $B'$ and measured per unit area of $B_0$ is $s^{ik} + \varepsilon s'^{ik}$. The functions $\Phi_1$, $\Psi_1$, $\Phi_2^{(1)}$, $\Psi_2^{(1)}$ are required to zero order in $\varepsilon$ ($\Phi_1(T + \varepsilon T', I_1 + \varepsilon I'_1, I_2 + \varepsilon I'_2) \simeq \Phi_1(T, I_1, I_2)$). Including all terms up to order $\varepsilon$, we obtain for the stress components tensor

$$s^{ik} + \varepsilon s'^{ik} = \Phi_0 g^{ik} + \Psi_0 B^{ik} + 2[\sigma_1 + 2I'_3 \sigma_2^{(1)}] G^{ik} +$$

$$+ \varepsilon [\Phi' g^{ik} + \Psi' B^{ik} + \Psi_0 B'^{ik} + p' G^{ik} + (2\sigma_1 + 4I'_3 \sigma_2^{(1)}) G^{ik}] + \ldots, \tag{27}$$

where

$$
\begin{aligned}
&\Phi' = LT' + A_0 I_1' + F_0 I_2' + \Phi_1 I_3' + (I_3')^2 \Phi_2^{(1)},\\
&\Psi' = MT' + F_0 I_1' + B_0 I_2' + \Psi_1 I_3' + (I_3')^2 \Psi_2^{(1)},\\
&p' = \chi_1 T' + \Phi_1 I_1' + \Psi_1 I_2' + 2\chi_2 T' I_3' + 2\Phi_2^{(1)} I_1' I_3' + 2\Psi_2^{(1)} I_2' I_3' +\\
&\quad + 4I_3'' \sigma_2^{(1)} + 2I_3' (\sigma_1 + 2I_3' \sigma_2^{(1)} + 2\sigma_2^{(2)} + 3I_3' + \sigma_3^{(1)}).
\end{aligned} \tag{28}
$$

Now [1] if (27) is to represent the constitutive relations for incompressible material when $\varepsilon \to 0$, it is necesarry that (17) and (27) determine the same values of $s^{ik}$ in this limit. Hence:

$$
p_0 = 2\sigma_1 + 4I_3' \sigma_2^{(1)}, \tag{29}
$$

where $p_0$ is a known function. From (29) we can find $I_3'$. Now from (27) and (29) we find

$$
s'^{ik} = \Phi' g^{ik} + \Psi' B^{ik} + \Psi_0 B'^{ik} + p' G^{ik} + p_0 G'^{ik}. \tag{30}
$$

Analogously, up to order $\varepsilon$, we obtain:

$$
\begin{aligned}
&-Q'^i = T' |^j [C_1^0 \delta_j^i + C_2^0 \gamma_j^i + C_3^0 \gamma_m^i \gamma_j^m] + T |^j [C_2^0 \gamma_j'^i + C_3^0 (\gamma_m^i \gamma_j'^m + \gamma_m'^i \gamma_j^m) +\\
&\quad + (C_{1p}^0 \delta_j^i + C_{2p}^0 \gamma_j^i + C_{3p}^0 \gamma_m^i \gamma_j^m) I_p' + (C_1^1 \delta_j^i + C_2^1 \gamma_j^i + C_3^1 \gamma_m^i \gamma_j^m) I_3'] +\\
&\quad + {}_0\varepsilon^{ijk} \{[T |_r T |_s \gamma_t'^r + \gamma_t^r (T |_r T' |_s + T' |_r T |_s)] [C_4^0 \delta_j^i \delta_k^t + C_5^0 \delta_j^s \gamma_k^t +\\
&\quad + C_6^0 \gamma_j^s \gamma_k^t] + T |_r T |_s \gamma_t^r [C_5^0 \gamma_k'^t \delta_j^s + C_6^0 (\gamma_j^s \gamma_k'^t + \gamma_j'^s \gamma_k^t) + (C_{4p}^0 \delta_j^s \delta_k^t + C_{5p}^0 \delta_j^s \gamma_k^t +\\
&\quad + C_{6p}^0 \gamma_j^s \gamma_k^t) I_p'] + I_3' T |_r T |_s \gamma_t^r (C_4^1 \delta_j^s \delta_k^t + C_5^1 \delta_j^s \gamma_k^t + C_6^1 \gamma_j^s \gamma_k^t)\}, \quad (p = 1, 2, 4, 5, 6).
\end{aligned} \tag{31}
$$

The equations of equilibrium in $B'$ are [9]

$$
[s'^{ik} + s^{ir} w^k \|_r] \|_i = 0 \tag{32}
$$

and the energy equation is [7]:

$$
(Q'^i + Q^i G^{mn} \gamma_{mn}') \|_i = 0. \tag{33}
$$

Because the components of second order displacement vector enter in (30) only in the term containing $I_3''$, in the expression (28) for $p'$, is more convenient for the first-order theory, to take instead of $(19)_1$, only $\bar{v}(\theta^i) + \varepsilon \bar{w}(\theta^i)$ and to regard $p'$ as an arbitrary function which is required in order to evaluate $s'^{ik}$. It is therefore sufficient for the first-order theory, to specify the function $\sigma$ in the form:

$$
\sigma = \sigma_0 (T, I_1, I_2) + (I_3 - 1) \sigma_1 (T, I_1, I_2) + \varepsilon^{-1} (I_3 - 1)^2 \sigma_2^{(1)} (T, I_1, I_2) \tag{34}
$$

and the functions $C_s$

$$
C_s = C_s^{(0)} (I_1, I_2, I_4, I_5, I_6) + (I_3 - 1) C_s^{(1)} (I_1, I_2, I_4, I_5, I_6), \tag{35}
$$

instead of (9). The boundary conditions for $B'$ are [1]:

$$
p^k + \varepsilon p'^k = [s^{ik} + \varepsilon (s'^{ik} - s^{ik} w^r \|_r)] (n_i + \varepsilon n_i'), \tag{36}
$$

$$
h = (Q^j + \varepsilon Q'^i) (n_i + \varepsilon n_i'). \tag{37}
$$

## 4. Application

We consider a circular cylindrical tube of an almost incompressible material. First, we state the known solution for incompressible material.

Let $B$ be ist undeformed state, and external and internal radii $a_1$ and $a_2$ respectively. Suppose that

$$\sigma = \sigma_0 (T, I_1, I_2), \qquad C_s = C_s^0 (I_1, I_2, I_4, I_5, I_6), \qquad (s = 1,..., 6). \tag{38}$$

The coordinates $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ are chosen to coincide with cylindrical coordinates $(r, \theta, x_3)$ in the deformed body.

The point $(r, \theta, x_3)$ was initially at $(\rho, \vartheta, X_3)$.

We consider the thermomecanic state:

$$r = r(\rho), \qquad \theta = \vartheta, \qquad x_3 = \frac{1}{\lambda} X_3, \qquad Q' = \frac{k}{r}, \qquad Q^2 = Q^3 = 0. \tag{39}$$

The incompressibility conditions gives [2]

$$r = \sqrt{\lambda}\, \rho \quad \text{or} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} r. \tag{40}$$

The state (39) with $r$ given by (40) is a controllable state [4].

From $(39)_2$ and $(5)_2$ we find that $T = T(r)$; from (5) we find $s^{ij} = \tau^{ij}$; from $(7)_1$ and (39) we see that

$$p_0 = -\lambda \Phi_0 - \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right) \Psi_0. \tag{41}$$

The energy equation $(7)_2$ is satisfied. The temperature $T$ can be found by $(5)_2$ and $(39)_4$,

$$\left[C_1^0 + \frac{1}{2}(\lambda - 1) C_2^0 + \frac{1}{4}(\lambda - 1)^2 C_3^0\right] \lambda \frac{dT}{dr} = -\frac{k}{r}. \tag{42}$$

The non zero components of the stress tensor is

$$s^{33} = \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) \Phi_0 + \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda^2\right) \Psi_0. \tag{43}$$

We now consider that the cylinder is made of slightly compressible material with the free energy function of the form (34) and $C_s$ by the form (35). We seek a solution in whith each particle undergoes in addition to the radial displacement defined by (39) a small additional radial displacement $\varepsilon u$, and the temperature $T$ has an additional one $\varepsilon T'$, both, $u$ and $T'$ depending only on $r$. Thus a point which is initialy in $(\rho, \vartheta, X_3)$ is finally in $B'$ at $(r + \varepsilon u, \theta, x_3)$, where $(\rho, \theta, X_3)$ are related to $(r, \theta, x_3)$ by $(39)_1$ and (40), and the temperature is $T + \varepsilon T'$.

We have the following components of the vector $w$, referred to the base vectors of the polar coordinates $(r, \theta, x_3)$:

$$w_1 = w^1 = u(r), \qquad w_2 = w^2 = w_3 = w^3 = 0.$$

It follows that the non-zero components of $s'^{ik}$ are

$$s'^{11} = \lambda\Phi' + \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right)\Psi' + 2\lambda^2\frac{u}{r}\Psi_0 + p' - 2u_r p_0,$$

$$r^2 s'^{22} = \lambda\Phi' + \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right)\Psi' + 2\lambda^2 u_r \Psi_0 + p' - 2\frac{u}{r}p_0, \tag{44}$$

$$s'^{33} = \frac{1}{\lambda^2}\Phi' + \frac{2}{\lambda}\Psi' + \frac{2}{\lambda}\left(u_r + \frac{u}{r}\right)\Psi_0 + p', \quad \left(u_r = \frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

where

$$\Phi' = \boldsymbol{L}T' + 2\left(u_r + \frac{u}{r}\right)\left[\lambda A_0 + F_0\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2\right) + \Phi_1\right] + 4\left(u_r + \frac{u}{r}\right)^2\Phi_2^{(1)},$$

$$\Psi' = \boldsymbol{M}T' + 2\left(u_r + \frac{u}{r}\right)\left[\lambda F_0 + B_0\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right) + \Psi_1\right] + 4\left(u_r + \frac{u}{r}\right)^2\Psi_2^{(1)}; \tag{45}$$

by (31) we have:

$$\begin{aligned}
-Q'^1 = {} & \left[C_1^0 + \frac{1}{2}(\lambda-1)C_2^0 + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2 C_3^0\right]\lambda\frac{dT'}{dr} + \\
& + \frac{dT}{dr}\left\{[\lambda C_2^0 + \lambda(\lambda-1)C_3^0]u_r + 2\left(u_r + \frac{u}{r}\right)\left\{\left[C_1^1 + \frac{1}{2}(\lambda-1)C_2^1 + \right.\right.\right. \\
& \left. + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2 C_3^1\right] + 2\lambda\left[C_{11}^0 + \frac{1}{2}(\lambda-1)C_{21}^0 + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2 C_{31}^0\right] + \\
& \left. + 2\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right)\left[C_{12}^0 + \frac{1}{2}(\lambda-1)C_{22}^0 + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2 C_{32}^0\right]\right\} + \\
& + 2\lambda\frac{dT}{dr}\frac{dT'}{dr}\left[C_{14}^0 + \frac{1}{2}(\lambda-1)C_{24}^0 + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2 C_{34}^0\right] + \\
& + \left[\lambda(\lambda-1)\frac{dT}{dr}\frac{dT'}{dr} + 2\lambda u_r\left(\frac{dT}{dr}\right)^2\right]\left[C_{15}^0 + \frac{1}{2}(\lambda-1)C_{25}^0 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2 C_{35}^0\right] + \left[\frac{\lambda(\lambda-1)^2}{2}\frac{dT}{dr}\frac{dT'}{dr} + 2\lambda u_r\left(\frac{dT}{dr}\right)^2\right]\left[C_{16}^0 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(\lambda-1)C_{26}^0 + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2 C_{36}^0\right],
\end{aligned} \tag{46}$$

or

$$\boldsymbol{Q}'^1 = \boldsymbol{L}_1(r)\frac{dT'}{dr} + \boldsymbol{L}_2(r)u + \boldsymbol{L}_3(r)\frac{du}{dr}, \quad \boldsymbol{Q}'^2 = \boldsymbol{Q}'^3 = 0,$$

with evident notations for $\boldsymbol{L}_i(r)$, $(i = 1, 2, 3)$.

From (32) we have:

$$\frac{\partial s'^{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(s'^{11} - r^2 s'^{22}) = 0, \quad \frac{\partial s'^{22}}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial s'^{33}}{\partial x_3} = 0. \tag{47}$$

From (29) we obtain

$$u_r + \frac{u}{r} = \frac{p_0 - 2\sigma_1}{8\sigma_2^{(1)}} . \tag{48}$$

The energy equation (33) becomes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[Q'^1 + 2Q^1\left(u_r + \frac{u}{r}\right)\right] + \frac{1}{r}\left[Q'^1 + 2Q^1\left(u_r + \frac{u}{r}\right)\right] = 0. \tag{49}$$

From $(47)_2$ and $(47)_3$ we see that $p' = p'(r)$. The unknown functions are $p'$, $u$ and $T'$. By (48) we find:

$$u = \frac{1}{8r}\left\{\int_{r_1}^{r} \frac{p_0 - 2\sigma_1}{\sigma_2^{(1)}} r\mathrm{d}r + A\right\}, \tag{50}$$

where $A$ is a constant which can be chosen to give to $u$ any assigned value on any surface $r = \text{const}$. From (49) we find

$$Q'^1 + 2Q^1\left(u_r + \frac{u}{r}\right) = \frac{k_1}{r}, \tag{51}$$

from which we can obtain $T'$. Now $(47)_1$ will give us $p'$ as

$$p' = -\lambda\Phi' - \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right)\Psi' - 2\lambda^2\frac{u}{r}\Psi_0 + 2u_r p_0 - L(r).$$

The final expressions for the stress components are readily deduced from this results. This agrees with [1] for elasticity, when $T = \text{const}$. and $T' = 0$.

*Received August 25, 1976*

*Polytechnic Institute, Jassy,*
*Department of Mechanics*

REFERENCES

1. Spencer A. J., Intern. Symp. Haifa, Israel, Pergamon Press, 1964, 200–217.
2. Green A. E., Adkins J. E., *Large Elastic Deformations*. Oxford, 1960.
3. Petroski H. J., Corlson D. E., J. Appl. Mech., 1151–1154 (1970).
4. Laws N., Quart. Appl. Math., **XXVIII**, *3*, 432–440 (1970).
5. England A. H., Green A. E., Phil. Trans., **253 A**, *1034*, 517–542 (1961).
6. Flavin J. N., Green A. E., J. Mech. Phys. Solids, **9**, 179–190 (1961).
7. Green A. E., Proc. Roy. Soc., Serie A, **266**, 1–27 (1962).
8. Rusu E., Bul. Inst. polit. Iaşi (to be published).
9. Green A. E., Zerna W., *Theoretical Elasticity*. Oxford, 1954.

## DEFORMAŢII TERMOPLASTICE FINITE PENTRU UN SOLID APROAPE INCOMPRESIBIL

(Rezumat)

A. J. Spencer [1] a studiat problema deformaţiilor finite pentru un solid elastic aproape incompresibil. În lucrare se analizează aceeaşi problemă în termoelasticitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 532.5

# ELECTROMODELAREA CÎMPULUI HIDRODINAMIC ÎN PLANUL MERIDIAN AL TURBOMAȘINILOR AXIALE

DE

PAUL MATEI

**Notații**

*Pentru mărimile hidrodinamice*

$\varphi$ — funcția potențial de viteze
$\psi$ — funcția de curent
$Q$ — debitul volumic
$\overline{V}$ — viteza meridiană
$z,r$ — coordonatele carteziene ale planului meridian
$R,\theta$ — coordonatele polare ale planului meridian
$v_r$, $v_z$ — componentele vitezei meridiane
$Q_p$ — debitul sursei punctiforme
$Q_l$ — debitul sursei liniforme
$Q_t$ — debitul total al turbomașinii
$Q_c$ — debitul unui tub de curent
$r_M$ — raza maximă a butucului rotorului

*Pentru mărimile electrice*

$U$ — potențialul electric în cîmpul electrocinetic
$\rho$ — rezistivitatea mediului electroconductor
$\sigma$ — conductivitatea
$\overline{j}$ — densitatea de curent
$j_r$, $j_z$ — componentele densității de curent în planul meridian al modelului electric
$I_p$ — curentul introdus în model prin electrodul punctiform
$I_l$ — curentul introdus în model prin electrodul liniform
$I_0$ — „curentul general"
$I_t$ — curentul care electromodelează debitul total al mașinii
$I_c$ — curentul unui tub de curent
$\psi_e$ — funcția de curent în cîmpul electric
$r_M^*$ — raza maximă a butucului rotorului pe model
$S$ — scara generală de electromodelare
$S_l$ — scara lungimilor
$S_j$ — scara densității de curent

## 1. Introducere

Analogia electrohidrodinamică, ocupă în prezent un loc important ca metodă experimentală eficace în rezolvarea acelor probleme din hidrodinamică, care nu pot fi tratate prin metode matematice exacte — în genere cînd limitele domeniului fluid sînt complicate ca formă, nu sînt date analitic sau nu se pot exprima prin funcții simple.

Aplicată la turbomașini, metoda permite determinarea rapidă a spectrului meridian, eliminînd încercările succesive și operațiunile de corecție, care, cel puțin în cadrul metodei grafoanalitice, sînt deosebit de laborioase.

Electromodelarea cîmpurilor axial simetrice, necesită medii electroconductoare în formă de sector de cilindru (se utilizează în majoritatea cazurilor electroliți), axa de simetrie a cîmpului fiind și axa de înclinare a modelului. În acest fel, modelul realizat la similitudine geometrică cu domeniul studiat, este alimentat prin electrozi metalici masivi fie după liniile echipotențiale extreme, fie după liniile de curent extreme (fig. 1 a și b).

În primul caz, se trasează experimental familia de linii echipotențiale, în cazul al doilea — familia de linii de curent.

Evident, procedeul deși expeditiv în obținerea spectrului, nu poate conduce la optimizarea formelor hidrodinamice decît în urma unor repetate încercări, deoarece forma inițială a frontierelor (linia butucului rotorului și linia carcasei), este subiectivă.

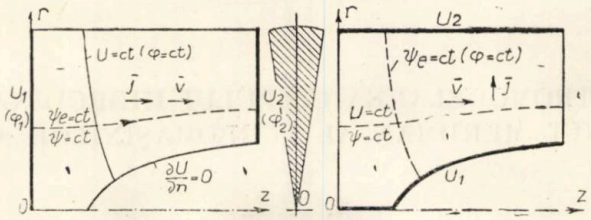



Fig. 1

În lucrare se expune un procedeu de electromodelare care întrunește avantajele analogiei electrohidrodinamice clasice, dar permite în plus obținerea experimentală a liniei butucului rotorului și carcasei, ca linii de cîmp, odată cu întreg spectrul meridian.

## 2. Cîmpul hidrodinamic la turbomașinile axiale de lucru (pompe, ventilatoare)

Cîmpul din planul meridian se poate obține pe baza teoriei carenelor deschise, dezvoltată și aplicată la studiul turbomașinilor [4], [5].

În esență, prin suprapunerea în planul meridian a unui curent hidrodinamic general de translație în sensul axei $Oz$, cu o sursă punctiformă pozitivă și o sursă liniformă negativă constituind singularități în axa de simetrie, se obțin carene deschise proprii turbomașinilor axiale de lucru, dacă suma debitelor introduse prin singularități este diferită de zero.

Cîmpul este caracterizat prin potențialul vitezelor

$$\varphi = v_\infty z - \frac{Q_p}{4\pi R} + \frac{|Q_l|}{4\pi l} \ln \frac{R + R_l + l}{R + R_l - l} \tag{1}$$

și prin funcția de curent

$$\psi = \frac{v_\infty}{2} r^2 - \frac{Q_p}{4\pi}(1 + \cos\theta) + \frac{|Q_l|}{4\pi}\left(\frac{R - R_l}{l} + 1\right). \tag{2}$$

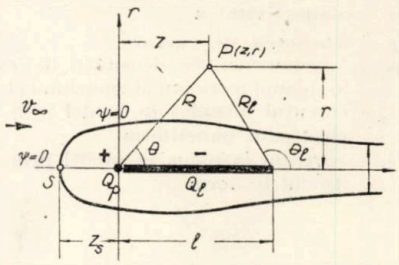



Fig. 2 — Cîmpul hidrodinamic meridian la turbomașinile axiale de lucru.

Componentele vitezei meridiane în direcția axială și radială se obțin prin derivarea funcției de curent și au valorile :

$$v_z = v_\infty + \frac{Q_p}{4\pi R^2}\cos\theta + \frac{|Q_l|}{4\pi l}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_l}\right), \tag{3}$$

$$v_r = \frac{Q_p}{4\pi R r}\sin^2\theta - \frac{|Q|}{4\pi r l}(\cos\theta - \cos\theta_l). \tag{4}$$

În punctul de stagnare $S(-z_s, 0)$, deoarece $v_z = 0$, $\cos\theta = -1$, $R = |z_s|$, $R = |z_s| + l$, ecuația (3) se scrie,

$$0 = v_\infty - \frac{Q_p}{4\pi z_s^2} + \frac{|Q_l|}{4\pi l}\left(\frac{1}{|z_s|} - \frac{1}{|z_s| - l}\right). \tag{5}$$

Dacă $Q_c$ reprezintă debitul unui tub de curent, ecuația liniei de curent se poate scrie sub forma :

$$2Q_c = 2\pi v_\infty r^2 - Q_p(1 + \cos\theta) + |Q_l|\left(\frac{R - R_l}{l} + 1\right) \tag{6}$$

și în ipoteza că aici înlocuim $Q_c$ prin $Q_t$, debitul total al turbomașinii, se obține relația care permite trasarea frontierei exterioare.

Ecuația liniei de curent se poate scrie adimensional sub forma

$$\delta = \beta\rho^2 - \delta_1(1 + \cos\theta) + \frac{\mu - \mu'}{\lambda} + 1, \tag{7}$$

în care parametrii adimensionali sînt definiți prin

$$\beta = \frac{2\pi r_M^2 v_\infty}{|Q_l|}, \quad \lambda = \frac{l}{r_M}, \quad \delta_1 = \frac{Q_p}{|Q_l|}, \quad \delta = 2\frac{Q_c}{|Q_l|}, \tag{8}$$

iar coordonatele adimensionale prin relațiile

$$\zeta = \frac{z}{r_M}, \quad \rho = \frac{r}{r_M}, \quad \mu = \frac{R}{r_M}, \quad \mu' = \frac{R'}{r_M}. \tag{9}$$

### 3. Electromodelarea cîmpului hidrodinamic la turbomașinile axiale de lucru

Metoda de electromodelare se bazează pe utilizarea unui model în formă de sector de cilindru, obținut prin înclinarea unei cuve cu electrolit în jurul unei laturi, alimentat la capete prin doi electrozi masivi $E_1$ și $E_2$ iar în axa de simetrie printr-un electrod punctiform pozitiv și unul liniform negativ situați în imediata vecinătate. Electrozii $E_1$ și $E_2$ determină un cîmp care electromodelează curentul hidrodinamic general de translație în sensul axei $Oz$. Potențialul electrocinetic staționar, în cazul dispunerii electrozilor conform schemei din fig. 3, va fi

$$U_0 = -\frac{j_{z_0}}{\sigma} z \tag{10}$$

iar funcția curentului electric,

$$\psi_e = -\frac{1}{\rho}\int_0^r r\frac{\partial U}{\partial z}\,dr = \frac{1}{\rho\sigma}\int_0^r j_{z_0} r\,dr = j_{z_0}\frac{r^2}{2}. \tag{11}$$

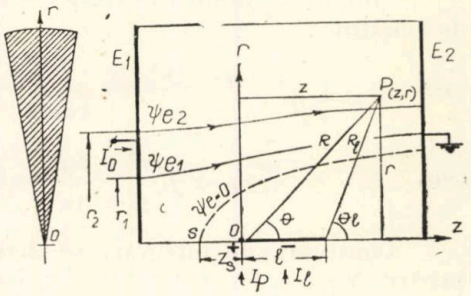



Fig. 3

Se poate constata imediat că

$$j_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_e}{\partial r} = j_{z_0} > 0 \quad \text{și} \quad j_r = 0, \tag{12}$$

deci liniile de cîmp sînt îndreptate în sensul $Oz$ pozitiv.

Curentul unui tub de curent, delimitat meridian de liniile $\psi_{e_2}$ și $\psi_{e_1}$ este $I_{0_e} = \pi j_{z_0}(r_2^2 - r_1^2)$.

Cîmpul electrodului punctiform pozitiv din axa de simetrie este descris de ecuațiile

$$U_p = \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{I_p}{R}, \tag{13}$$

$$\psi_e = \int_0^r \frac{r}{\rho}\frac{\partial U}{\partial r}\,dz = -\frac{I_p}{4\pi}\cos\theta, \tag{14}$$

componentele densității de curent, avînd valorile

$$j_z = \frac{I_p}{4\pi R^2}\cos\theta, \quad j_r = \frac{I_p}{4\pi R^2}\sin\theta. \tag{15}$$

În fine electrodul liniform negativ, considerat uniform încărcat, dă un cîmp caracterizat prin

$$U_l = -\frac{I_l}{4\pi\sigma l}\ln\frac{R + R_l + l}{R + R_l - l}, \tag{16}$$

$$\psi_e = -\frac{I_l}{4\pi l}(R - R_l), \tag{17}$$

cu densitățile de curent

$$j_z = \frac{I_l}{4\pi l}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_l}\right), \quad j_r = \frac{I_l}{4\pi r l}(\cos\theta_l - \cos\theta). \tag{18}$$

Cîmpul rezultant din model se obține prin superpoziție și va fi descris de ecuațiile:

$$U = \frac{j_{z_0}}{\sigma}z + \frac{I_p}{4\pi\sigma R} - \frac{|I_l|}{4\pi\sigma l}\ln\frac{R + R_l + l}{R + R_l - l}, \tag{19}$$

$$\psi_e = j_{z_0}\frac{r^2}{2} - \frac{I_p}{4\pi}\cos\theta - \frac{|I_l|}{4\pi l}(R_l - R) + K_{\psi e}. \tag{20}$$

Constanta de integrare se determină din condițiile la limite astfel: pentru $S(-z_s, 0)$, $r = 0$, $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$, $R_l = l + z_s$, $R = z_s$, ecuația (20) devenind pentru punctul de stagnare

$$0 = \frac{I_p}{4\pi} + \frac{|I_l|}{4\pi l}(-l + z_s - z_s) + K_{\psi e},$$

de unde

$$K_{\psi e} = -\frac{I_p}{4\pi} + \frac{|I_l|}{4\pi}.$$

Funcția de curent cu constanta determinată se va scrie

$$\psi_e = j_{z_0}\frac{r^2}{2} - \frac{I_p}{4\pi}(1 + \cos\theta) + \frac{|I_l|}{4\pi}\left(\frac{R - R_l}{l} + 1\right). \tag{21}$$

Ecuația liniei carenei pe modelul electric, $\psi_e = 0$, se obține din precedenta iar ecuația unei linii de curent din planul meridian care constituie frontiera exterioară a tubului de curent străbătut de curentul $I_c$ va fi:

$$4\pi\psi_e = 2I_c = 2\pi j_{z_0} r^2 - I_p(1 + \cos\theta) + |I_l|\left(\frac{R - R_l}{l} + 1\right). \tag{22}$$

Linia carenei pe modelul electric, este linia de separație între liniile de cîmp aparținînd curentului general și cele rezultate din cîmpul singularităților, care se închid prin electrodul de masă (fig. 3).

Ecuația liniei de curent pe modelul electric se poate scrie adimensional într-o formă analogă cu (7):

$$\delta^* = \beta^*\rho^{*2} - \delta_1^*(1 + \cos\theta) + \frac{\mu^* - \mu_l^*}{\lambda^*} + 1, \tag{23}$$

în care parametrii adimensionali și coordonatele adimensionale sînt definiți prin relațiile

$$\beta^* = \frac{2\pi (r_M^*)^2 j_{z_0}}{|I_l|}, \quad \lambda^* = \frac{l^*}{r_M^*}, \quad \delta_1^* = \frac{I_p}{|I_l|}, \quad \delta^* = \frac{2I_0}{|I_l|},$$
$$\zeta^* = \frac{z^*}{r_M^*}, \quad \rho = \frac{r^*}{r_M^*}, \quad \mu^* = \frac{R^*}{r_M^*}, \quad \mu_l^* = \frac{R_l^*}{r_M^*}. \tag{24}$$

### 3.1. Stabilirea scării de electromodelare

Se constată imediat că sînt necesare și suficiente:

a) scara lungimilor

$$S_l = \frac{l^*}{l} = \frac{r_M^*}{r_M} = \frac{R^*}{R} = \ldots$$

b) scara densității de curent

$$S_j = \frac{k_\varphi \rho j_{z_0}}{v_\infty}, \tag{25}$$

unde $k_\varphi$ este factor de dimensiuni $[k_\varphi] = [\text{s cm}^2/\text{V}]$.

Se poate arăta că introducerea acestor scări determină complet corespondența de mărimi între modelul electric și cel hidrodinamic. În adevăr, introducerea scării lungimilor nu afectează egalitățile

$$\lambda^* = \lambda, \quad \zeta^* = \zeta, \quad \rho^* = \rho, \quad \mu^* = \mu, \quad \mu_l^* = \mu_l.$$

Comparînd ecuațiile adimensionale (7) și (23), constatăm că mai trebuiesc îndeplinite și următoarele trei egalități pentru a se realiza o corespondență valorică completă între termenii ecuațiilor adimensionale :

$$\beta^* = \beta, \quad \delta^* = \delta, \quad \delta_1^* = \delta_1 .$$

Plecînd de la relația de definiție pentru $\beta^*$, vom înlocui mărimile $j_{z_0}$ și $(r_M^*)^2$ prin $v_\infty$ și $r_M$, utilizînd scările propuse :

$$\beta^* = \frac{2\pi (r_M^*)^2 j_{z_0}}{|I_l|} = \frac{2\pi S_l^2 r_M^2 v_\infty S_j}{|I_l|} \frac{|Q_l|}{|Q_l|} = \beta \frac{S_l^2 S_j}{k_\varphi \rho} \frac{|Q_l|}{|I_l|}.$$

Egalitatea $\beta^* = \beta$ va fi satisfăcută cînd $(S_l^2 S_j / k_\varphi \rho)(Q_l / I_l) = 1$, de unde

$$I_l = |Q_l| \frac{S_l^2 S_j}{k_\varphi \rho}, \tag{26}$$

relație care exprimă legătura dintre curentul sursei liniforme și debitul $Q_l$. Se constată ușor că $I_p$ și $Q_p$ se găsesc în aceeași relație și de asemenea $I_c$ și $Q_c$.

Mărimea

$$S = \frac{S_l^2 S_j}{k_\varphi \rho} \tag{27}$$

este scara generală de electromodelare.

### 3.2. Schema electrică

Realizarea condițiilor rezultate din analiza teoretică este posibilă în practică prin utilizarea schemei electrice de principiu, reprezentată în fig. 4, care asigură polaritățile electrozilor prin t.e.m. alternative în opoziție de fază. Pentru controlul curenților de alimentare, schema este prevăzută cu miliampermetre și rezistoare variabile în circuitele electrozilor iar pentru

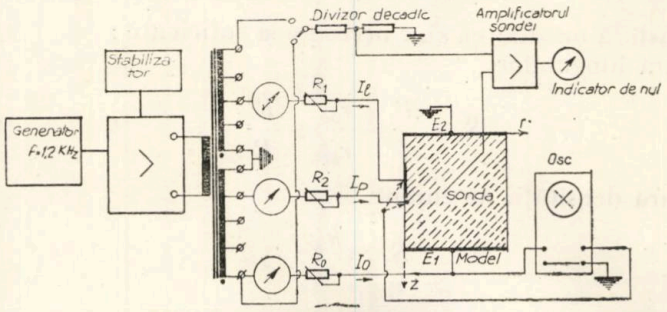



Fig. 4

controlul fazelor tensiunilor la bornele modelului, cu un osciloscop. Partea de măsurare cuprinde sonda cu un vîrf, amplificatorul sondei, indicatorul și cutiile de rezistențe decadice.

Transfșrmatorul este conectat în etajul final al unei amplificator de putere, care primește semnal sinusoidal (1,2 kHz) de la un generator de frecvență.

### 3.3. Rezultate experimentale

În fig. 5 este prezentat un exemplu de spectru meridian propriu turbomașinilor axiale de lucru (pompe-ventilatoare), obținut pe un model cu următoarele caracteristici: electrolit $CuSO_4 . 5H_2O$ cu $\sigma = 1{,}85 . 10^{-4}$ 1/Ω cm, dimensiuni 840/620 mm, unghi de înclinare 12°15′, parametri de alimentare $I_0 = 3$ mA, $I_p = 74{,}3$ mA, $I_l = 47{,}8$ mA, $f = 1{,}2$ kHz.

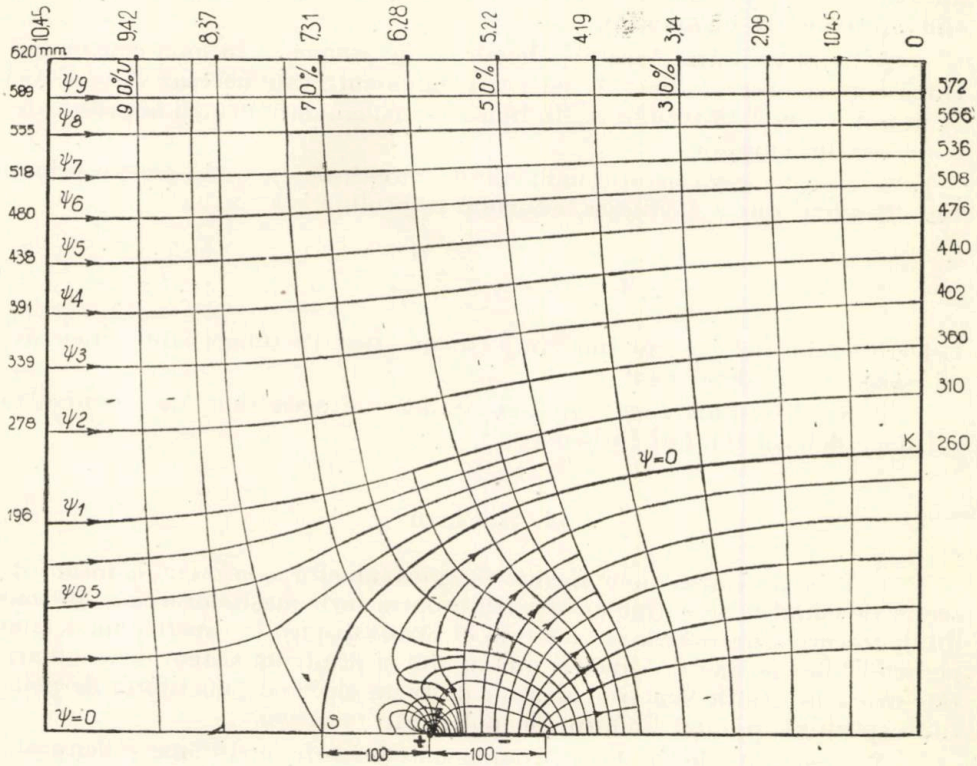



Fig. 5

Liniile de curent au fost trasate grafic, respectînd relațiile de recurență:

a) la nivelul electrodului $E_1$

$$D_{i+1} = \sqrt{\frac{D_i^2}{n} + D_i^2},$$

b) la nivelul electrodului $E_2$

$$D_{i+1} = \sqrt{D_i^2 + \frac{1}{n}(D^2 - D_b^2)},$$

în care $n$ — numărul tuburilor de curent, $D$ — dimensiunea modelului în sensul $r$, $D_b$ — diametrul butucului rotorului la nivelul $E_2$.

### 3.4. Utilizarea rezultatelor experimentale

În urma electromodelării, se dispune de configurația spectrului meridian, de caracteristicile constructive ale modelului și de valorile $I_0$, $I_p$, $I_l$, $j_{z_0}$, $\sigma$. Trecerea la modelul hidrodinamic se face astfel:

1. Se alege scara lungimilor în mod convenabil, în funcție de gabaritul aproximativ al turbomașinii (la o anumită putere, dimensiunile de gabarit sînt aproximativ cunoscute).

2. Se alege scara densității de curent de asemenea în mod convenabil. După cum se observă din (25), cu $\rho$ și $j_{z_0}$ cunoscuți, este necesar să se aleagă $S_j$ în așa fel încît să rezulte $v_\infty$ în limitele recomandate pentru această categorie de turbomașini.

3. Se calculează debitul unui tub de curent, de exemplu pentru primul tub de curent din vecinătatea butucului rotorului:

$$Q_{c_1} = \pi r_1^2 v_\infty = \pi \frac{(r^*)^2}{S_l^2} v_\infty.$$

Celelalte tuburi de curent din cîmp (în practică 10 tuburi sînt suficiente) se consideră de debit egal.

4. Se determină linia carcasei, considerînd acea linie de curent care satisface debitul total al turbomașinii.

## 4. Concluzii

1. Prin utilizarea unui mediu electroconductor continuu în formă de sector de cilindru, se obține un spectru propriu turbomașinilor axiale, în condițiile în care alimentarea se face prin electrozi dispuși la capetele modelului perpendicular pe axa de simetrie a cîmpului și printr-un sistem de singularități situat în axa de simetrie, alcătuit dintr-un electrod punctiform de polaritate pozitivă și unul liniform de polaritate negativă.

Analogia este de tip direct, componentele vitezei meridiane și densității de curent avînd aceeași direcție și același semn.

2. Față de metodele clasice, procedeul permite determinarea liniei carcasei și butucului rotorului — ca linii de cîmp; prezintă de asemenea avantajul că pe același model pot fi studiate o mare varietate de spectre, prin simpla modificare a parametrilor de alimentare.

*Primită la 10 iunie 1976*

*Institutul politehnic, Iași,*
*Laboratorul de mecanica fluidelor*
*și mașini hidropneumatice*

## BIBLIOGRAFIE

1. Karplus J. W., *Analog Simulation of Field Problems.* Mc. Graw-Hill Book Company, Inc., N.Y., 1956.
2. Pfleiderer C., *Die Kreiselpumpen fur Flüssigkeiten und Gase.* Springer-Verlag, 1955.
3. Сунцов Н. Н., *Методы аналогии в аэродинамике.* Физматгиз, М., 1968.
4. Taşcă D., *Mişcări potenţiale axial simetrice în jurul carenelor deschise şi aplicaţiile lor la studiul turbomaşinilor.* Teză de doctorat, Bucureşti, 1968.
5. Taşcă D., Burchiu V., *Carene închise ca forme hidrodinamice în studiul prin mişcări potenţiale al turbinei-pompă bulb.* Hidrotehnica, *4* (1970).
6. Волынский Б. А., *Модель для решения краевых задач.* Физматгиз, М., 1960.
7. Matei P., *Analogia electrică a cîmpului hidrodinamic la turbomaşini.* Teză de doctorat, Inst. polit. Iaşi, 1973.

## DIE ELEKTROMODELLIERUNG VON HYDRODYNAMISCHEN MERIDIANFELDER BEI AXIALE TURBOMASCHINEN

(Zusammenfassung)

Aufgrund der Theorie von offenen Kielen in der Hydrodynamik wird ein elektrisches Analogieverfahren zur Modellierung von hydrodynamischen Meridianfelder bei axiale Turbomaschinen dargestellt.

Das Feld im elektrischen Modell wird durch die Überlagerung des „allgemeinen Stromes" mit das, eines entlang der Symmetrieachse angeordneten Singularitätssystems entsprechende Feld, erhalten.

Im Vergleich zu den üblichen Methoden, das vorliegende Verfahren gestattet, einmal mit den gesamten Meridianspektrum, auch die Rotorstamm - und Karkasselinien, als einfache Feldlinien zu ermitteln.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.D.621.9

# QUELQUES OBSERVATIONS SUR L'USINABILITÉ PAR CHARIOTAGE TRANSVERSAL DE FINITION DE QUELQUES ACIERS DE QUALITÉ AU CARBONE

PAR

C. PICOŞ, LAURENŢIU SLĂTINEANU et TRAIAN GRĂMESCU

## 1. Introduction

L'usinabilité par la coupe d'un matériel représente sa capacité d'usinage par la coupe dans les conditions les plus avantageuses : l'usure des outils autant que possible réduite, une sollicitation mécanique diminuée de la machine-outil, quantité réduite de l'énergie consommée dans le processus d'usinage, qualité supérieure de la surface etc. Il est à remarquer que l'appréciation de l'usinabilité d'un materiel ne doit pas tenir compte d'un seul des indicateurs que nous venons de mentionner (l'usure de l'outil, la force de coupe, la qualité de la surface etc.), il est nécessaire de coréler les résultats obtenus par de diverses méthodes d'évaluation de l'usinabilité.

Ce travail se propose de présenter certains problèmes concernant la détermination des paramètres du régime de coupe et en même temps de mettre en évidence certains aspects qui concernent l'usinabilité par chariotage transversal de finition de qualques aciers de qualité au carbone en utilisant le critère de la rugosité de la surface.

Pour les expériences on a utilisé des aciers de qualité au carbone en état de livraison ; c'est dans cet état q'on utilise l'acier pour la fabrication d'un volume important de pièces. Des raisons économiques imposent souvent d'exécuter les chariotages transversaux de finition à des semi-ouvrés d'acier en état de livraison, pour éviter l'accroissement du coût de production par des traitements thermiques préalables.

Comme procédé de travail pour la détermination de l'usinabilité par le critère de la rugosité on a utilisé la méthode du chariotage transversal ; en voilà les raisons :

1. La méthode du chariotage transversal offre la possibilité d'une variation continue de la viteses de coupe et d'une mise en évidence extrêmement claire du domaine des vitesses dans lequel est réalisable la meilleure qualité de la surface dans des conditions données.

2. Pour les essais effectués dans les conditions de la production, le chariotage transversal ne demande pas des précautions spéciales, parce qu'il

peut s'effectuer sur des restes de barre, donc sur des volumes réduits de matériel et dont le domaine de revalorisation est généralement assez limité.

3. Pour l'étude de l'influence de la vitesse de coupe sur la qualité de la surface, la méthode du chariotage transversal assure, dans la mesure ou l'on peut travailler à un seul nombre de tours de la machine-outil (ce qui suppose l'existence des semi-ouvrés de grands diamètres), le maintien des mêmes caractéristiques dynamiques de l'usinage ; ce qui est difficile à réaliser dans le cas du chariotage longitudinal, quand, à cause de la modification des masses en rotation, au passage d'un nombre de tours à l'autre, on risque d'influencer la qualité de la surface résultée par le régime vibratoire, variable par rapport au nombre de tours utilisé.

4. L'utilisation du chariotage transversal comme méthode d'estimation de l'usinabilité par chariotage de finition, permet l'intégration de cette méthode à côté des autres, qui utilisent également le chariotage transversal, mais qui pour l'évaluation de l'usinabilité utilisent d'autres critères (par exemple, le critère de l'usure de l'outil).

5. Enfin, dans la pratique industrielle on peut rencontrer souvent des situations qui demandent la réalisation des surfaces planes d'une qualité supérieure ; dans de telles situations, on doit utiliser des régimes de coupe qui puissent assurer non seulement la qualité imposée de la surface, mais aussi une productivité élevée de l'usinage.

Les caractéristiques essentielles physiques et mécaniques des aciers étudiés sont conformes aux standards en vigueur (STAS 880-66, STAS 7450-66)

## 2. La méthode de travail

Les expérimentations ont été effectuées sur des restes de barre, conformément à la schème de la fig. 1. On a exécuté d'abord un chariotage transversal, puis le semi-ouvrés ont été percés le long de l'axe à l'aide d'une foret de 10 mm.

On a utilisé des restes de barre aux diamètres variables de 34 à 70 mm. Pour couvrir un domaine de vitesses de 0,16 à 3,5 m/s pour des zones de la pièce à l'extérieur du trou de 10 mm, on a généralement utilisé trois nombres de tours : 185, 600 et 1 200 tours/min.

Au cours des expérimentations, nous avons utilisé des outils avec plaquettes en carbures métalliques durs à jeter type S6 (Sandvik Coromant), capables à assurer une durée élevée de la vie dans des régimes durs de coupe, les essais étant effectués à des vitesses très réduites, aussi bien qu'à des vitesses relativement élevées. La fixation de la plaquette dans le support a été effectuée par voie mécanique ; la partie de coupe de la plaquette est pourvue d'une rainure d'évacuation du copeau, ayant la géométrie suivante : $r = 1$ mm, $\alpha = 11°$, $\gamma = 12°$, $\lambda = 7°$. L'orientation de l'outil par rapport à la pièce a été réalisée de manière à assurer les angles : $\varkappa = 90°$ et $\varkappa_1 = 30°$.

On a pris soin que l'état de l'usure de l'arête de coupe de la plaquette ne dépasse pas des valeurs de 0,2...0,3 mm. L'évaluation de la rugosité de la surface usinée a été effectuée à l'aide d'un profilomètre type Surtronic 112/1 100.

On a mesuré la rugosité de la surface après une détermination initiale des rayons de la pièce pour lesquels la vitesse a atteint des valeurs préétablies : 0,16 m/s, 0,25 m/s etc. Comme la vitesse de coupe a pris des valeurs par rapport au rayon, la longueur de la course du palpeur du profilomètre

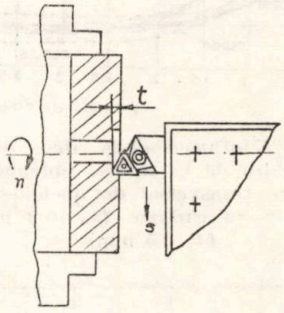



Fig. 1. — La schème de travail.

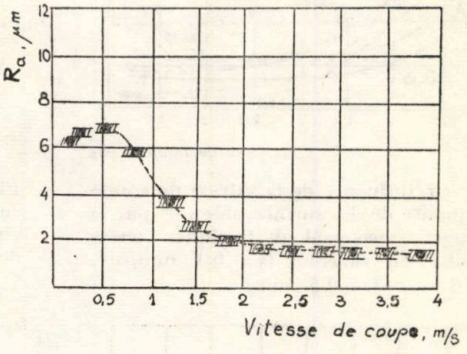



Fig. 2. —L'influence de la vitesse de coupe sur la qualité de la surface obtenue par le chariotage transversal de l'acier OLC 55 ($s = 0{,}2$ mm/rev, $t = 0{,}5$ mm).

a été fixée $l \approx 2{,}5$ mm, ce qui signifie qu'en réalité la rugosité determinée correspond à une zone de vitesses autour de la vitesse préétablie, le profilomètre indiquant la valeur de la déviation moyenne artihmétique du profil ($R_a$) pour la zone étudiée. La représentation graphique des résultats obtenus est donnée par la diagramme de la fig. 2, réalisée au chariotage de l'acier OLC 55, a une avance transversal $s = 0{,}2$ mm/rev et à une profondeur de coupe $t = 0{,}5$ mm, en l'absence du lubrifiant de coupe.

### 3. Résultats et conclusions

Dans les diagrammes présentées au cours de cet ouvrage, on a utilisé la vitesse moyenne correspondant à la zone pour laquelle a été déterminé la rugosité de la surface.

Les expériences effectuées dans les conditions décrites ci dessus (on a exécuté plus de 1 500 de déterminations de rugosité) ont permis l'accumulation d'un grand nombre de données, qui, représentées graphiquement, peuvent conduire à des conclusions intéressantes. Une partie des diagrammes obtenues à la suite des expérience sont présentées dans les figures 3...7.

À la suite de l'interprétation des données expérimentales, on peut retenir les conclusions suivantes :

1. Pour obtenir une qualité meilleure et uniforme de la surface par chariotage transversal, il est absolutement nécessaire de travailler à des vitesses situées en dehors du domaine de la formation de l'arête rapportée, que le chariotage à des petites vitesses est généralement inacceptable (ex-

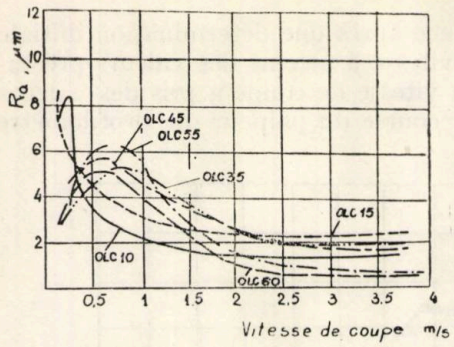



Fig. 3. — L'influence de la vitesse de coupe sur la qualité de la surface obtenue par le chariotage transversal de quelques aciers de qualité au carbone ($s = 0{,}1$ mm/rev, $t = 0{,}5$ mm).

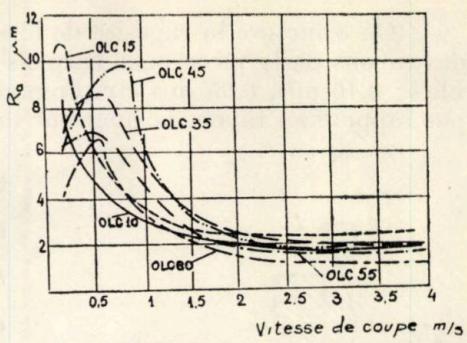



Fig. 4. — L'influence de la vitesse de coupe sur la qualité de la surface obtenue par le chariotage transversal de quelques aciers de qualité au carbone ($s = 0{,}2$ mm/rev, $t = 0{,}5$ mm).

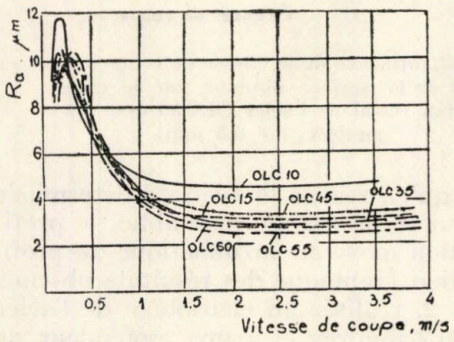



Fig. 5. — L'influence de la vitesse de coupe sur la qualité de la surface obtenue par le chariotage transversal de quelques aciers de qualité au carbone ($s = 0{,}45$ mm/rev, $t = 0{,}5$ mm).

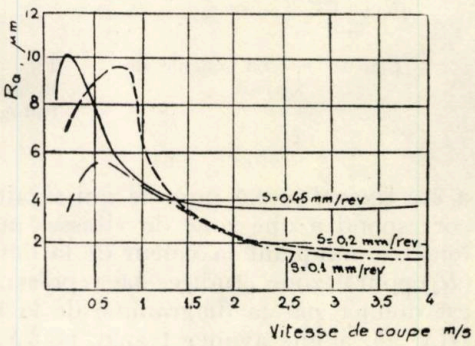



Fig. 6. — L'influence de la vitesse de coupe sur la qualité de la surface obtenue par le chariotage transversal de l'acier OLC 45, à diverses avances ($t = 0{,}5$ mm).

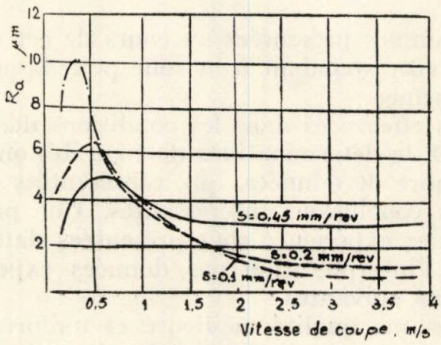



Fig. 7. — L'influence de la vitesse de coupe sur la qualité de la surface obtenue par le chariotage transversal de l'acier OLC 60, à diverses avances ($t = 0{,}5$ mm).

ception font les pièces dont le chariotage à des grands nombres de tours conduirerait à des phénomènes spécifiques au déséquilibre statique ou dynamique) ; il est évident qu'on impose, dans le cas des chariotages transversaux de finition, l'utilisation des vitesses de coupe les plus grandes possible ($v > 1{,}66$ m/s). L'usinage à des vitesses situées dans le domaine des vitesses pour lequel est caractéristique la formation de l'arête rapportée peut aussi conduire à des zones de surface de bonne qualité, mais l'instabilité du phénomène de la formation de cette arête limite la possibilité et la certitude d'obtention des rugosités diminuées, ce qu'impose d'ailleurs l'utilisation des grandes vitesses de coupe.

2. La réduction de la valeur de l'avance conduit à une amélioration de la qualité de la surface ; pourtant l'affirmation est généralement valable seulement pour de grandes vitesses de coupe, parce que à des petites vitesses il peut y avoir des portions étroites de surface d'une qualité assez bonne, l'explication de ce phénomène ayant toujours à la base la formation de l'arête rapportée.

3. Dans les conditions d'execution des expériences, on est arrivé à la conclusion que les aciers de qualité au carbone en état de livraison présentent des caractéristiques d'usinabilité par chariotage transversal assez semblables, les différences enregistrées allant de 1 à 2 μm (le critère $R_a$) ; on doit cependant mentionner que les aciers à un pourcentage plus élevé en carbone (OLC 55, OLC 60) se sont invariablement situés dans la zone des qualités meilleures de la surface, permettant même la réalisation des rugosités très réduites ($R_a = 0{,}5$ μm pour l'acier OLC 60, à $v > 1{,}83$ m/s, $s = 0{,}1$ mm/rev, $t = 0{,}5$ mm).

4. Les essais de détermination de l'usinabilité par chariotage transversal de finition peuvent conduire à des résultats discriminatoires seulement si on travaille à des vitesses de coupe relativement grandes (au-dessus de 1,8...2 m/s), quand on peut éviter la formation de l'arête rapportée et par conséquant la qualité de la surface reste approximativement la même sur des surfaces plus grandes.

*Reçue le 15 mars 1976*

*Institut Polytechnique, Jassy,*
*Chaire de Technologie de la Construction Mécanique*

## BIBLIOGRAPHIE

1. Enache Şt., *La qualité des surfaces usinées.* Dunod, Paris, 1972.
2. Teodorescu M., Ciucă C., Tarău I., Ţîru E., *Studiul influenţei regimului de aşchiere şi a structurii materialului asupra rugozităţii suprafeţelor prelucrate prin strunjire.* St. şi cer. de mec. apl., 28, *4* (1969)

## ASUPRA PRELUCRABILITĂŢII PRIN STRUNJIRE FRONTALĂ DE FINISARE A UNOR OŢELURI CARBON DE CALITATE

(Rezumat)

Lucrarea prezintă unele rezultate experimentale obţinute prin strunjirea frontală de finisare a unor oţeluri carbon de calitate. Se subliniază necesitatea utilizării unor viteze de aşchiere cît mai ridicate ($v > 1{,}66$ m/s) în scopul obţinerii unei calităţi bune a suprafeţei prelucrate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 620.17

# ASUPRA CERCETĂRII FENOMENULUI DE OBOSEALĂ LA OȚELURILE CARBON, PRIN MĂSURAREA POSTEFECTULUI MAGNETIC

DE

GH. I. ILIESCU

## 1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [2] a fost semnalată posibilitatea de a cerceta fenomenul de oboseală pe cale magnetică și a fost pusă la punct o metodă de măsurare a postefectului magnetic, ca principiu bazată pe trasarea ciclului de histerezis, după Ewing. Măsurătorile au fost făcute în curent continuu, cu ajutorul unui galvanometru balistic, iar epruvetele executate din oțeluri carbon, au fost solicitate prin încovoiere rotativă, la eforturi unitare de mărimi diferite, alese convenabil.

După cum este cunoscut, la temperatura mediului ambiant, oțelurile carbon prezintă fenomenul numit postefect de difuzie, datorit prezenței carbonului, care joacă rol de impuritate.

## 2. Rezultate experimentale

Reprezentările grafice, au în ordonată postefectul magnetic $\Delta B$, în unități arbitrare (număr de diviziuni ale deviației galvanometrului, de pe rigla gradată), iar în abscisă, logaritmul zecimal al numărului de cicluri ($\lg N$).

A. Un număr de epruvete, din oțeluri carbon diferite, au fost supuse la solicitări cu eforturi unitare inferioare rezistenței la oboseală. Dintre acestea epruveta cu simbolul 424 (OL 42), a fost detensionată în prealabil, prin încălzire pînă la temperatura de 600°C, pe o durată de 1,5 ore, apoi menținută la această temperatură un timp egal cu primul, după care a fost răcită o dată cu cuptorul.

Din rezultatele experimentale prezentate în primul grafic (fig. 1), se observă că postefectul magnetic măsurat se menține constant pînă la $10^7$ cicluri, punctele reprezentative fiind strîns grupate în jurul valorii de 622 diviziuni. În continuare numai dispersia a crescut, în timp ce valoarea medie a postefectului măsurat s-a menținut aproximativ aceeași. Începînd cu punctul corespunzător numărului de $4{,}3 \cdot 10^7$ cicluri (notat pe grafic cu punct negru), efortul unitar la care s-a efectuat solicitarea a fost sporit cu 1,5 MN/m$^2$.

În urma creşterii efortului unitar, nu s-a produs nici o modificare a mărimii postefectului magnetic măsurat, în schimb dispersia punctelor reprezentative a crescut în continuare.

Se remarcă faptul că primele măsurători au condus la valori aproximativ constante, spre deosebire de epruvetele nedetensionate, la care au loc creşteri liniare ale postefectului magnetic, cu logaritmul numărului de cicluri efectuate.

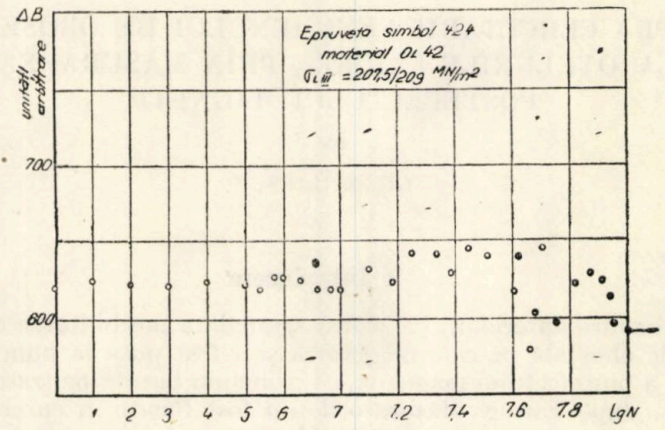



Fig. 1

Rezultatele prezentate arată că în cazul solicitărilor cu eforturi unitare inferioare rezistenţei la oboseală, postefectul magnetic nu suferă nici un fel de modificări, chiar dacă solicitarea se prelungeşte pînă la $10^8$ cicluri.

B. La solicitări ale epruvetelor cu eforturi unitare de valori apropiate sau egale cu rezistenţa la oboseală, s-au obţinut grafice cu forme mai complicate. Graficul care urmează (fig. 2) a fost obţinut pe o epruvetă nedetensionată, din oţel OL 50 (simbol 505), solicitată prin încovoiere rotativă, la un efort unitar $\sigma_{III} = 256$ MN/m$^2$. După cum se vede, curba începe cu o porţiune liniară, continuu crescătoare pînă la $10^3$ cicluri, numită zona I-a. Porţiuni cu această formă apar numai la epruvetele nedetensionate, pentru solicitări cu eforturi unitare, atît sub cît şi peste rezistenţa la oboseală şi se datoresc modificărilor produse de solicitarea la oboseală, asupra tensiunilor interne existente în oţel.

Între $10^3$ şi $7.10^5$ cicluri, graficul continuă cu un palier, pe durata căruia postefectul magnetic măsurat este constant, ceea ce probează că în oţel nu au loc nici un fel de modificări. Palierul acesta a fost numit zona a II-a.

În intervalul $7.10^5$ şi $7{,}83.10^6$ cicluri, postefectul magnetic măsurat creşte liniar cu logaritmul numărului de cicluri, fapt care ne-a condus la ipoteza că procesul de oboseală începe odată cu acest interval, numit zona a III-a.

În continuare, postefectul magnetic creşte mai repede decît în zona precedentă, după o lege de forma

$$\Delta B = aN^2 \exp\left(-\frac{b}{N}\right),$$

unde $a$ și $b$ sînt două constante, care pot fi determinate cu ajutorul graficului. Intervalul acesta, cuprins între $7{,}83 \cdot 10^6$ și $3{,}6 \cdot 10^7$ cicluri, a fost numit zona a IV-a.

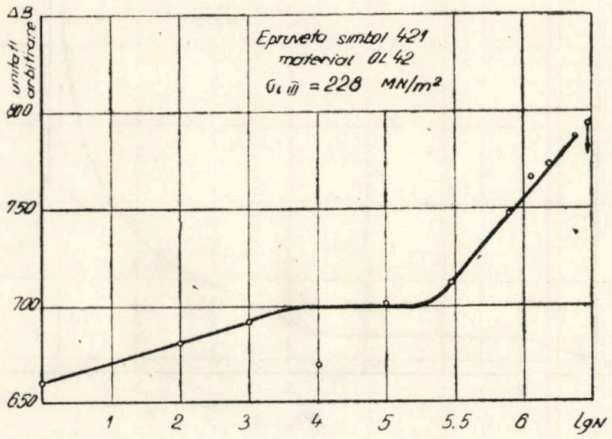



Fig. 2

Între $3{,}6 \cdot 10^7$ și $3{,}79 \cdot 10^7$ cicluri, are loc o scădere bruscă a postefectului magnetic măsurat, cu aproximativ 150 mm, datorită apariției fisurii de oboseală, care introduce un întrefier în circuitul magnetic, făcînd să scadă brusc indicațiile date de galvanometru. Acest interval a fost numit zona a V-a. Un rezultat asemănător s-a obținut experimental, prin slăbirea șurubului de strîngere a circuitului magnetic, dar cu toate străduințele depuse, întrefierul introdus prin acest artificiu n-a putut fi evaluat cantitativ.

Începînd de la $3{,}79 \cdot 10^7$ cicluri, postefectul magnetic măsurat scade foarte puțin, apoi crește ușor la apropierea de $10^8$ cicluri, punct în care încercările au fost întrerupte, deși epruveta ar mai fi putut încă funcționa ($o\rightarrow$). Această ultimă porțiune a graficului a fost numită zona a VI-a. Rezultate absolut analoge au fost obținute și pe epruvetele cu simbolurile 372 și 375, executate din oțel OL 37.

C. În cazul cînd solicitarea are loc la eforturi unitare cu valori superioare rezistenței la oboseală, capabile să producă ruperea epruvetei, atunci graficul cuprinde numai primele trei zone, după care se produce ruperea ($\updownarrow$), așa cum se poate vedea din ultimul grafic (fig. 3).

Rezultate analoge au fost obținute și pe epruvetele cu simbolurile 142 și 422, executate din oțel OL 42.

D. Dacă solicitarea are loc cu eforturi unitare mult superioare rezistenței la oboseală a oțelului încercat, procesul de oboseală se petrece într-un timp scurt, ceea ce impune ca măsurătorile să fie făcute la intervale mici de timp, astfel încît pe grafic să apară și zona a III-a. Este foarte probabil

însă, că ruperea are loc totdeauna în zona a V-a, dar experimental această presupunere n-a putut fi verificată.

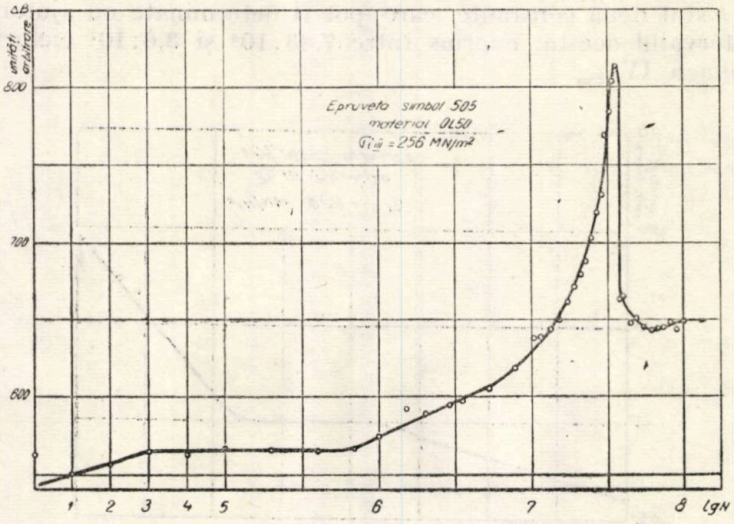



Fig. 3

### 3. Consideraţii asupra rezultatelor experimentale

1. Rezultatele obţinute demonstrează că postefectul magnetic variază cu numărul de cicluri, numai la solicitări ale căror eforturi unitare sînt egale sau depăşesc rezistenţa la oboseală. Fenomenul acesta, verificat prin multe încercări experimentale, este semnalat pentru prima dată în lucrarea de faţă.

2. Dacă solicitarea are loc cu un efort unitar inferior rezistenţei la oboseală, postefectul magnetic măsurat nu suferă nici o modificare, oricît s-ar prelungi solicitarea. Această constatare confirmă rezultatele anterioare, obţinute prin alte metode, adică se confirmă faptul că în condiţiile amintite, fenomenul de oboseală nu poate avea loc.

3. Dacă solicitarea se execută la eforturi unitare cu valori apropiate de rezistenţa la oboseală, se obţin grafice cu forme mai complicate, pe care se pot distinge mai multe zone, cu aspecte şi cauze diferite. Un astfel de grafic permite să se presupună că există şi posibilitatea ca epruveta să fisureze dar să nu se rupă, fapt de asemenea nesemnalat pînă acum.

4. Un studiu mai aprofundat al zonei I-a ar fi util pentru cercetarea tensiunilor interne din oţeluri, indiferent care ar fi originea lor.

5. În sfîrşit, se întrevede şi posibilitatea ca procedeul să fie folosit pentru controlul periodic nedistructiv al unor piese aflate în exploatare (arbori de mare importanţă). În cazul în care la o revizie se constată că postefectul magnetic a început să crească, înseamnă că procesul de oboseală a început şi că este prudent ca arborele să fie scos din funcţie.

*Primită la 10 mai 1976*

*Institutul politehnic, Iaşi,*
*Catedra de organe de maşini şi mecanisme*

## BIBLIOGRAFIE

1. Antonione C., Ferro A., Metallurgia Italiana, LIV, *6*, 205–211 (1962).
2. Iliescu Gh., Bărbulescu D., Savin Gh., Petrescu V., *Studiul vîscozității magnetice la oțelurile carbon, în funcție de oboseală*. Bul. Inst. polit. Iași, IV (VIII), *3–4*, 259–262 (1958).
3. Iliescu Gh., *O nouă metodă de determinare a rezistenței la oboseală a oțelurilor carbon, bazată pe măsurarea vîscozității magnetice*. Rev. Roum. Sc. Tech., Sér. de Métallurgie, 11, *2* (1966).
4. Laurent P., Kovacs A., Colloquium on Fatigue, Stockholm, May 25–27 1955, Proceedings, p. 145.

## ÜBER DIE UNTERSUCHUNG DER ERMÜDUNGSERSCHEINUNG BEI KOHLENSTOFFSTÄHLE, DURCH MESSUNG DER MAGNETISCHEN NACHWIRKUNG

(Zusammenfassung)

Die Arbeit stellt die Ergebnisse der Anwendung einer originellen Untersüchungsmethode der Ermüdungserscheinung, die auf die Messung der magnetischen Diffusionsnachwirkung beruht, vor. Bei den graphischen Darstellungen, ist die magnetische Nachwirkung ($\triangle B$) in der Ordinate und das dezimale Logarithmus des Drehzahles (lg $N$), in der Abszisse.

Die Messungen wurden auf Probekörper aus Kohlenstoffstähle durchgeführt. Die Probekörper hat man bei Drehbiegung mit verschiedenen Einheitsspannunden beansprucht.

Erfahrunggemäss wurde festgestellt, dass für Einheitsspannungen die kleiner als der Ermüdungsfestigkeit sind (Abb. 1), sich die gemessene magnetische Nachwirkung nich, für irgendwelche Spannungsdauer, ändert. Für Einheitsspannungen die nahe am Ermüdungsfestigkeit liegen (Abb. 2), oder grösser als diesen sind (Abb. 3), ändert sich die gemessene magnetische Nachwirkung mit dem Drehzahl, wie die zitierten Abbildungen zeigen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 620.17

# ASUPRA UNEI PROPUNERI DE PRELUCRARE A REZULTATELOR ÎNCERCĂRILOR DE UZURĂ PRIN FRECARE DE ALUNECARE

DE

ADRIAN M. VUSATIUC

Lucrarea propune un procedeu simplu de apreciere comparativă a rezultatelor unor încercări de uzură prin frecare de alunecare folosind în calcule mărimi curent determinate experimental ca : forţa de încărcare $N$ (daN/cm$^2$, daN/cm sau daN în funcţie de tipul contactului respectiv — de suprafaţă, liniar sau punctual), coeficientul de frecare $\mu$ şi „durabilitatea" — pînă la uzura probelor în limite admisibile funcţionării normale, sau pînă la apariţia gripajului — exprimată prin una dintre mărimile : număr de rotaţii ale epruvetei $n$ sau număr de curse duble $n$, timpul $t$ pînă cînd încercarea se consideră terminată etc — încercări care se fac în condiţii diferite în ceea ce priveşte încărcarea, ungerea, viteza de lucru etc.

În prezent, pentru descrierea fenomenelor de uzură se folosesc dependenţe de tipul $\mu = \mu(N)$, $t = t(N)$, $n = n(N)$, etc, la viteze diferite de lucru, încărcare, ungere.

Datele cu care se trasează aceste funcţii pot fi însă prelucrate combinat, astfel încît să putem obţine o informaţie mai completă asupra uzurii, cu o reflectare grafică mai sugestivă şi totodată cu importanţă mai mare pentru practică.

Pentru aceasta se propune folosirea unui nou parametru notat $W$ şi care se exprimă ca raportul dintre încărcarea $N$ şi „durabilitatea" probei sau organului respectiv, de exemplu :

$$W_n = \frac{N_i}{n_i}, \qquad W = \frac{N_k}{t_k}, \qquad W_{nt} = \frac{N_l}{n_l\, t_l} \quad \text{etc,}$$

indicii $i$, $k$, $l$, arătînd că valoarea lui $W$ se referă la aceeaşi încercare, efectuată în condiţii specifice. $W$ este în general cu mult subunitar — pentru practică interesînd desigur numai acele valori care sînt foarte mici, corespunzătoare unei „durabilităţi" mari şi foarte mari.

Prelucrarea datelor se propune a se face în sistemul de coordonate $\mu$, $W$ — studiindu-se curbele $\mu = \mu(W)$, pentru condiţiile specifice încercărilor.

Justificarea trasării acestor dependințe este dată de :

a) faptul că, coeficientul de frecare dă indicații asupra mărimii energiei disipate prin frecare — lucru ilustrat prin poziția curbei (mai sus sau mai jos) în raport cu axa absciselor ;

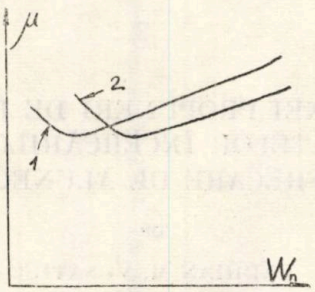



Fig. 1

b) parametrul $W$ — subunitar — deplasează curba spre stînga (mai mult sau mai puțin, funcție de mărimea „durabilității"), conducînd la diferențierea netă a rezultatelor încercărilor. Acest lucru este important mai ales în cazul în care se studiază comparativ influența diferitelor tratamente termochimice și termice asupra rezistenței la uzură a suprafețelor.

În fig. 1 este dată alura acestor curbe pentru două loturi de piese încercate în condiții identice dar supuse la tratamente termochimice diferite. Se observă că „durabilitatea" mai mare a pieselor din lotul *1* conduce la deplasarea curbei *1* mai la stînga.

Din practică se poate aprecia cantitativ valoarea pentru $W$, care apoi să servească pentru comparație în încercările experimentale efectuate pe epruvete. De exemplu, pentru $W_n$ în condiții bune de ungere, valoarea orientativă se înscrie în limitele $10^{-7}...10^{-8}$ daN/cm²/rot.

Curbele se pot trasa și în sistemul de coordonate : coeficient de frecare, lg $W$, sau — lg $W$.

Propunerea de introducere a parametrului $W$ mai este justificată și de faptul că el caracterizează global două ($W_n$ , $W_t$) și chiar trei ($W_{nt}$) mărimi importante — încărcare specifică și „durabilitate", permițînd o apreciere cantitativă mai certă a rezistenței la uzură, dînd deci posibilitatea să se estimeze comparativ, în urma experimentărilor, comportarea ulterioară în practică a suprafețelor tratate prin diferite metode.

În concluzie se poate spune că din punct de vedere comparativ rezultatele vor fi cu atît mai bune cu cît curba $u = \mu(W)$ este situată mai aproape de originea axelor de coordonate — în sistemul $\mu$, $W$.

*Primită la 23 februarie 1976*

*Institutul politehnic, Iași,*
*Catedra de tehnologia construcției de mașini*

BIBLIOGRAFIE

1. Vasilică Gh. ș. a., *Procese de lubrificație, frecare și uzură la suprafețe metalice.* Ed. Acad., Buc., 1967.
2. Iliuc I., *Tribologia straturilor subțiri.* Ed. Acad., Buc., 1974.

3 * * *, *О природе трения твердых тел.* Минск, 1971.
4. Костецкий Б. И., *Трение, смазка и износ в машинах.* Киев, 1970.
5. * * * *Frecare. Uzură. Ungere. Lubrifianţi.* Documentare selectivă, Colecţia 1971—1973.
6. Chişu Al. ş. a., *Determinarea uzurii cu radioizotopi.* Ed. tehn., Buc., 1967.
7. Pavelescu D., *Concepţii noi, calcul şi aplicaţii în frecarea şi uzarea solidelor deformabile.* Ed. Acad., Buc., 1971.

## A METHOD OF ANALYSIS WEAR EXPERIMENTAL DATA

(Summary)

A function $\mu = \mu(W)$, where $\mu$ is the friction coefficient, and $W$ is the ratio between load, $N$, and endurancy life to wear (expressed in revolutions $n$, or time $t$), is proposed to be used.

This function allows a comparison of wear resistance of differend surface treatments to be made, and, in function of practical conditions, the best solutions to be chosen.

The value of $W$ is proposed to be used as measure of reliability, and this can be determined experimentally.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 621.9

# EINE THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG DER GEOMETRIE DER FREIWINKELFLÄCHEN VON SPIRALBOHRERN MIT DOPPELTEM ELLIPSENZYLINDERMANTELANSCHLIFF

VON

GH. CAŞLER, N. GOJINEŢCHI und VITALIE BELOUS

Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine geometrische, teoretische und experimentelle Untersuchung zur Bewertung spanabhebenden Eigenschaften von Spiralbohrern mit doppeltem Ellipsenzylindermantelanschliff [1]. Für dieses Schleifverfahren wurde die Schleifmaschine [2] gebaut, deren Serienproduktion kürzlich bei I. M. Suceava begonnen hat.

Ähnliche geometrische Untersuchungen, jedoch für andere Schleifverfahren, sind von S. Rudnik [3], H. Dress [4], T. E. Solntzeva [5] u.a. ausgeführt worden, und zwar für Kegelmantel - Kreiszylindermantel -, schraubenförmigen, ebenen und doppelten ebenen Anschliff sowie einem der Autoren der vorliegenden Arbeit für den einfachen [6] und doppelten Ellipsenzylindermantelanschliff.

Zur Bewertung der spanabhebenden Eigenschaften und der Möglichkeiten, die Schleifparameter einzustellen, werden in vorliegender Arbeit verwendet: die Hinterschliffkurven der Freifläche, die Kurven, nach denen sich die Freiwinkel im zylindrischen Schnitt entlang der Haupt- und der Querschneide ändern und die Kurven nach denen sich der Spanwinkel längs der Querschneide ändert. Alle diese Kurven wurden theoretisch und auch experimentell bestimmt.

Zur Herleitung der Beziehungen zur Berechnung der genannten Parameter wird die auch von anderen Autoren gebrachte Methode angewandt, und zwar : es wird die Gleichung der Freifläche hergeleitet, diese von einem Zylinder mit Halbmesser $r$ geschnitten, dann werden die Koordinaten der Schnittkurve bestimmt, welche die Hinterschliffkurve darstellt und schliesslich wird der Ausdruck für den Freiwinkel in einem erzeugenden Punkt dieser Kurve hergeleitet.

Das Schema, nach dem die ellipsenzylindrischen Freiflächen erzeugt werden, sowie das Rechenschema für die untersuchten Parameter sind in Abb. 1 gegeben.

Die Freifläche eines Zahnes besteht aus zwei sich schneidenden, ellipsenzylindrischen Flächenteilen. Diese entstehen, indem die Projektionsellipsen

$e_1$, $e_2$ (Abb. 1 *a*, *b*) der inneren und äusseren Kreisförmigen Kanten zweier Topfscheiben in der Richtung $B_{real}$ gleiten. Die Scheiben sind konzentrisch, ihre Achse ist um den Winkel $\varphi$ zur geraden Richtung $B$ geneigt (Annäherung des Vorschubs $B_{real}$), ihre Hauptdrehbewegung ist $A$; die Arbeit-

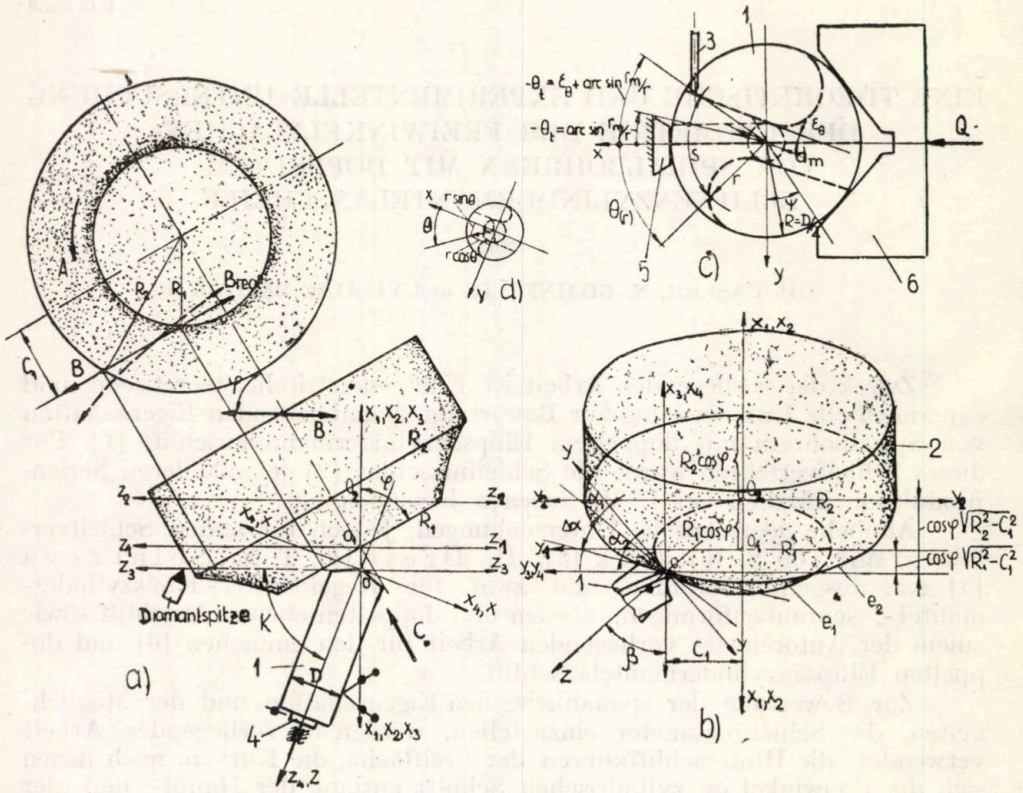



Abb. 1

flächen der Scheiben sind Rotationshyperboloide und werden gleichzeitig durch eine Diamantspitze erzeugt, die sich im Abstand $C_1$ von der Achse der Schleifscheibe in der Klemmvorrichtung anstelle des zu schleifenden Bohrers befindent. Der Bohrer *1* mit Durchmesser $D = 2R$ wird mitels der prismatischen Elemente *5*, *6* in der Klemmvorrichtung gehalten, so dass dessen Achse $\beta$ mit der Ebene bildet, in welche die Vorschubrichtung $B$ fällt, und der Winkel $K$ mit der Richtung $B$; ausserdem ist der Bohrer noch durch das Auflageelement *3* tangential ausgerichtet, so dass die Hauptschneide parallel zur Richtung $B$ oder um einen Winkel $\varepsilon_0$ (Abb. 1 *c*) geneigt ausfällt; der Bohrerschaft stützt sich auf das bewegliche, ebene Element *4*, das den Bohrer nach seiner Drehung in der Vorrichtung um 180° in unveränderter Lage hält.

Um die Gleichung der Freiwinkelfläche herzuleiten, wird dem in der Vorrichtung ausgeruchteten Bohrer das Achsensystem $xyz$ zugeordnet, dessen positive $z$-Achse auf das Stütztelement *4* gerichtet ist. Darauf bezogen werden die Ausdrücke die elliptischen Zylinder $e_1$, $e_2$ aufstellt, die entstehen, wenn die kreisförmigen Kanten der Topfscheiben mit den Halbmessern $R_1$, $R_2$ in der Vorschubrichtung $B$ gleiten. Die Gleichungen der Ellipsenzylinder $e_1$, $e_2$ in den ursprünglichen Koordinatensystem $x_1\, y_1\, z_1$ und $x_2\, y_2\, z_2$ mit den Achsen $z_1$, $z_2$ parallel zur Richtung $B$ laten dann:

$$(1)\qquad \frac{x_1^2}{R_1^2\cos^2\varphi}+\frac{y_1^2}{R_1^2}-1=0, \qquad \frac{x_2^2}{R_2^2\cos^2\varphi}+\frac{y_2^2}{R_2^2}-1=0.$$

Um die Gleichungen (4) der Ellipsenzylinder $e_1$, $e_2$ im Koordinatensystem $xyz$ zu erhalten, werden die Ursprünge $O_1$, $O_2$ der Systeme $x_1\, y_1\, z_1$ und $x_2\, y_2\, z_2$ nach $O$ verschoben, das System $x_3\, y_3\, z_3$ wird unter Verwendung der Koordinatentransformationen (2) um den Winkel $-K$ um die Achse $y_3$ gedreht und dann wird das System $x_4\, y_4\, z_4$ unter Verwendung Koordinatentransformationen (3) um den Winkel $-\beta$ um die Achse $z_3$ gedreht, welche die Richtung der Generatrix der hyperboloidalen Arbeitsfläche der Topfscheiben ist.

$$\begin{gathered}x_3=x_4\cos K-z_4\sin K\,;\quad y_3=y_4\,,\quad z_3=x_4\sin K+z_4\cos K\,;\\ (2)\quad x_4=x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3\,,\quad y_4=x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3\,,\\ z_4=x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+z\cos\gamma_3\,;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\cos\alpha_1=1-\cos^2K\,(1-\cos\beta),\ \cos\alpha_2=\sin\beta\cos K,\ \cos\alpha_3=\sin K\,(1-\cos\beta),\\ (3)\qquad \cos\beta_1=-\sin\beta\cos K,\quad \cos\beta_2=\cos\beta,\quad \cos\beta_3=\sin\beta\sin K,\\ \cos\gamma_1=\sin K\cos K\,(1-\cos\beta),\quad \cos\gamma_2=\sin\beta\sin K,\\ \cos\gamma_3=1-\sin^2K\,(1-\cos\beta)\,;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[(x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3)\cos K-(x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+\\ +z\cos\gamma_3)\sin K-\cos\varphi\sqrt{R_1^2-C_1^2}]^2+(x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3+\\ +C_1)^2\cos^2\varphi-R_1^2\cos^2\varphi=0,\quad y\leqslant 0,\\ (4)\qquad (x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3)\cos K-(x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+z\cos\gamma_3)\sin K-\\ -\cos\varphi\sqrt{R_2^2-C_1^2}]^2+(x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3+C_1)^2\cos^2\varphi-\\ -R_2^2\cos^2\varphi=0,\quad y\geqslant 0.\end{gathered}$$

Durch den Schnitt dieser Flächen mit einem Zylinder vom Halbmesser $r$, dessen Gleichung in Zylinderkoordinate $r\theta z$ lautet (Abb. 1 *d*): $y=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, erhält man, unter Berücksichtigung von (3), nach entsprechenden algebraischen Unformungen die Hinterschliffkurven $C_{d1}$, $C_{d2}$, welche den implizite definierten ellipsenzylindrischen Teilen entsprechen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (C_{d1}) \quad & G_1 Z^2 + 2H_1 Z + I_1 = 0, \\ (C_{d2}) \quad & G_2 Z^2 + 2H_2 Z + I_2 = 0, \end{aligned}$$

$$G_1 = G_2 = \cos^2\alpha_3 \cos^2 K + \cos^2\gamma_3 \sin^2 K - \cos\alpha_3 \cos\gamma_3 \sin 2K + \cos^2\beta_3 \cos^2\varphi,$$

$$H_1 = h_{11} r \cos\theta + h_{12} r \sin\theta + h_{13},$$

$$H_2 = h_{21} r \cos\theta + h_{22} r \sin\theta + h_{23};$$

$$h_{11} = h_{22} = \cos^2 K (\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 - \cos\gamma_1 \cos\gamma_3) - \frac{1}{2} \sin 2K (\cos\alpha_3 \cos\gamma_1 + \cos\alpha_1 \cos\gamma_3) + \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 + \cos\beta_1 \cos\beta_3 \cos^2\varphi,$$

$$h_{12} = h_{22} = \cos^2 K (\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - \cos\gamma_2 \cos\gamma_3) - \frac{1}{2} \sin 2K (\cos\alpha_3 \cos\gamma_2 + \cos\alpha_2 \cos\gamma_3) + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 \cos^2\varphi,$$

$$h_{13} = \cos\varphi \sqrt{R_1^2 - C_1^2} (\cos\gamma_3 \sin K - \cos\alpha_3 \cos K) + C_1 \cos\beta_3 \cos^2\varphi,$$

$$h_{23} = \cos\varphi \sqrt{R_2^2 - C_1^2} (\cos\gamma_3 \sin K - \cos\alpha_3 \cos K) + C_1 \cos\beta_3 \cos^2\varphi;$$

$$I_1 = i_{11} r^2 \cos^2\theta + i_{12} r^2 \sin 2\theta + i_{13} r \cos\theta + i_{14} r \sin\theta + i_{15} r^2,$$

$$I_2 = i_{21} r^2 \cos^2\theta + i_{22} r^2 \sin 2\theta + i_{23} r \cos\theta + i_{24} r \sin\theta + i_{25} r^2;$$

$$i_{11} = i_{21} = \cos^2 K (\cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2) + \sin^2 K (\cos^2\gamma_1 - \cos^2\gamma_2) - \sin 2K (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2) + \cos^2\varphi (\cos^2\beta_1 - \cos^2\beta_2),$$

$$i_{12} = i_{22} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos^2 K + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \sin K - \frac{1}{2} \sin 2K (\cos\alpha_2 \cos\gamma_1 + \cos\alpha_1 \cos\gamma_2) + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos^2\varphi,$$

$$i_{13} = 2 [\cos\varphi \sqrt{R_1^2 - C_1^2} (\sin K \cos\gamma_1 - \cos K \cos\alpha_1) + C_1 \cos\beta_1 \cos^2\varphi],$$

$$i_{23} = 2 [\cos\varphi \sqrt{R_2^2 - C_1^2} (\sin K \cos\gamma_1 - \cos K \cos\alpha_1) + C_1 \cos\beta_1 \cos^2\varphi],$$

$$i_{14} = 2 [\cos\varphi \sqrt{R_1^2 - C_1^2} (\sin K \cos\gamma_2 - \cos K \cos\alpha_2) + C_1 \cos\beta_1 \cos^2\varphi],$$

$$i_{24} = 2 [\cos\varphi \sqrt{R_2^2 - C_1^2} (\sin K \cos\gamma_2 - \cos K \cos\alpha_2) + C_1 \cos\beta_2 \cos^2\varphi],$$

$$i_{15} = i_{25} = \cos^2\alpha_2 \cos^2 K + \cos^2\gamma_2 \sin^2 K - \cos\gamma_2 \sin 2K + \cos^2\beta_2 \cos^2\varphi.$$

Die positiven Wurzeln der Gleichungen (5) sind die Gleichungen der Hinterschliffkurven $C_{d1}$, $C_{d2}$ in explizierter Form:

$$(6)\qquad Z_1 = -\frac{H_1}{G_1} + \sqrt{\left(\frac{H_1}{G_1}\right)^2 - \frac{I_1}{G_1}}, \qquad 0 \geqslant \theta \geqslant \theta_t = \varepsilon_\theta + \arcsin\frac{d_m}{D},$$

$$(7)\qquad Z_2 = -\frac{H_2}{G_2} + \sqrt{\left(\frac{H_2}{G_2}\right)^2 - \frac{I_2}{G_2}}, \qquad \theta \geqslant 0.$$

Mittels der Gleichungen (6) und (7) werden die Hinterschliffkurven auf theoretischem Weg erhalten.

Die Freiwinkel $\alpha_{x1}$, $\alpha_{x2}$ im zylindrischen Schnitt in einem erzeugenden Punkt der den Kurven $C_{d1}$, $C_{d2}$ entsprechenden Freifläche können mittels der Beziehungen (8), (9) berechnet werden,

$$(8) \quad \operatorname{tg} \alpha_{x1} = \frac{1}{rG_1}\left[-\frac{dH_1}{d\theta} + \frac{2H_1\frac{dH_1}{d\theta} - G_1\frac{dI_1}{d\theta}}{2H_1^2 - G_1 I_1}\right], \quad 0 \geqslant \theta \geqslant \theta_t = \varepsilon_\theta + \operatorname{arc\,sin}\frac{d_m}{D},$$

$$(9) \quad \operatorname{tg} \alpha_{x2} = \frac{1}{rG_2}\left[-\frac{dH_2}{d\theta} + \frac{2H_1\frac{dH_1}{d\theta} - G_1\frac{dI_1}{d\theta}}{2H_1^2 - G_1 I_1}\right], \quad \theta \geqslant 0,$$

in denen $G_1$, $H_1$, $I_1$, $G_2$, $H_2$ und $I_2$ die oben angegebene Bedeutung haben und ausserdem,

$$\frac{dH_1}{d\theta} = -h_{11} r \sin\theta + h_{12} r \cos\theta, \qquad \frac{dH_2}{d\theta} = -h_{22} r \sin\theta + h_{22} r \cos\theta;$$

$$\frac{dI_1}{d\theta} = -i_{11} r^2 \sin 2\theta + 2i_{12} r^2 \cos 2\theta - i_{13} r \sin\theta + i_{14} r \cos\theta,$$

$$\frac{dI_2}{d\theta} = -i_{21} r^2 \sin 2\theta + 2i_{22} r^2 \cos 2\theta - i_{23} r \sin\theta + i_{24} r \cos\theta.$$

Die in eine zur Auswertung durch Elektronenrechner passende Form gebrachten Beziehungen (8) und (9) gestatten es, untersuchen, wie sich die Freiwinkel $\alpha_{xt}$, entlang der Haupt- und der Querschneide ändern und wie sich der Spanwinkel $\gamma_{tt}$ entlang der Querschneide ändert.

Die Gleichung der Querschneide und der Ausdruck für den Winkel $\psi$ sind durch den Schnitt der Ellipsenzylinder $e_1$, $e_2$ mit den Gleichungen (4) zu bestimmen, wobei einer davon in einem Koordinatensystem auszudrücken ist, das gegenüber dem System $xyz$ um 180° gedreht ist. Die Projection der in der Ebene $xoy$ erhaltenen Kurve gestattet die Bestimmung des Winkels $\psi$.

Um die in vorliegender Arbeit hergeleiteten Beziehungen zu überprüfen, wurden sie zur theoretischen und experimentellen Untersuchung der spanabhebenden Eigenschaften eines Bohrers mit $D = 30$ mm angewandt, der auf dem Versuchsprototyp der ELBITOR-Maschine geschliffen wurde. Die Konstruktions- und Einstellungsmerkmale dieses in den Laboratorien des Katheders für Werkzeugmaschinen und Werkzeuge der Mechanik-Facultet des Polytechnischen Institutes Iassy für I. M. Suceava gebauten Prototypes sind (Abb. 1): $R_1 = 64$ mm, $R_2 = 100$ mm, $C_1 = 60{,}5$ mm, $\beta = 49°40'$, $K = 59°$, $\varphi = 70°30'$, $\varepsilon_\theta = 0°$; am Bohrer war $d_m = 5{,}05$ mm.

Die Geometrie des geschliffenen Bohrers muss nicht als die für dieses Verfahren güngstigste angesehen werden, es wurden absichtlich solche Parameter gewählt, die gestatten sollten, die Merkmale dieses Verfahrens auf theoretischem und experimentellem Weg hervorzuheben.

Die Werte der Konstruktions- und Betriebsmerkmale wurden in die Beziehungen (6), (7) eingesetzt und damit die Hinterschliffkurven in Abb. 2 *a* gezeichnet. Für die numerischen Rechnungen stand ein Elektronenrechner Felix CE 32 zur Verfügung. Unter Einhaltung der gleichen Konstruktions- und Einstellungsmerkmale wurde ein Bohrer mit $D = 30$ mm geschliffen und experimentell die in Abb. 2 *b* wiedergegebenen Hinterschliffkurven bestimmt. Für die Messungen wurde ein Apparat nach S c h r o p p [4], [6] verwendet, den die Autoren durch ein Periskopsystem verbessert haben, so dass möglich wurde, die Freifläche der geschliffenen Bohrer, im Intervall von 0...50 mm, einzustellen, zu messen und zu photographieren. Die experimentelle Bestimmung der Hinterschliffkurven besteht in der Hauptsache darin, dass mittels einer Messuhr die Grösse in einem imaginären Zylinderschnitt mit dem Halbmesser $r$ gemessen wird, ebenso die der Freifläche entsprechenden Masse, und diese in einem Diagramm $s\,o\,i$ dargestellt werden. In diesem entspricht der Ursprung dem Punkt auf der Schneide, $s$ ist der dem Halbmesser $r$ und dem Drehungswinkel des Bohrers entsprechende Bogen und $i = z - z_t$ ist die Differenz zwischen der Koordinate $z$ des gemessenen Punktes und der Koordinate $z_t$ des Punktes auf der Schneide entsprechend dem Halbmesser $r$.

Der Vergleich der durch die theoretischen Beziehungen erhaltenen Kurven mit den experimentell gefundenen (Abb. 2 *a*, *b*) zeigt, dass sie fast identisch verlaufen, somit sind die theoretisch hergeleiteten Beziehungen gültig. In der Detaildarstellung für $r = 14$ mm (Abb. 3) sind einige wertmässige Abweichungen zu erkennen, sowohl bei den Massen $i$ als auch bei den gemessenen und berechneten Freiwinkeln $\alpha_x$. Diese Abweichungen rühren von Messfehlern bei der Bestimmung der Winkel $\alpha$, $\beta$ und des Abstandes $C_1$ her, von der Verformung der hyperboloidalen Fläche der Schleifscheibe durch Abnützung der inneren und der äusseren Kante, von Rechenfehlern in den überaus der numerischen Berechnung sowie von den Fehlern bei der experimentellen Aufnahme von Hinterschliffkurven, die auch von H. D r e s s erwähnt werden [4].

Die in Abb. 2 *c* wiedergegebenen Kurven für die Änderung der Freiwinkel $\alpha_{x1}$, $\alpha_{x2}$ entlang der Hinterschliffkurven für $r = 8$, 5, 14 mm wurden auf Grund der Beziehungen (8), (9) erhalten, indem $r$ als Parameter betrachtet wurde und für den Winkel $\theta$ Werte aus dem Intervall $0 \ldots -\arcsin(d_m/D)$ für die Beziehung (8) und aus dem Intervall $0 \ldots \theta$ für die Beziehung (9) angenommen wurden.

Indem in Gleichung (8) $\theta = \arcsin(d_m/D)$ und $\theta = \psi = -46°10'$ (durch Messen erhalten) eingezetzt und $D$ in den Intervallen 30...7 bzw. 7...3 mm geändert wurde, erhielt man die Kurven, nach denen sich die Freiwinkel $\alpha_{xt}$ im Zylinderschnitt entlang der Haupt- und der Querschneide ändern; sie sind in Abb. 4 dargestellt.

Die selben Winkel wurden auch experimentell bestimmt, nach der oben erwähnten Methodik, mit der selben Apparatur. Dazu wurde der Winkel zwischen den Tangenten an die experimentell bestimmten Hinterschliffkurven und der $s$-Achse (vgl. Abb. 3) gemessen und in Abb. 4 wiedergegeben.

Durch Einsetzen von $\theta = 0$ in die Beziehungen (8), (9) erhielt man die Werte für die Freiwinkel $\alpha_{x1}$, $\alpha_{x2}$ auf der Höhe der Schnittkante der

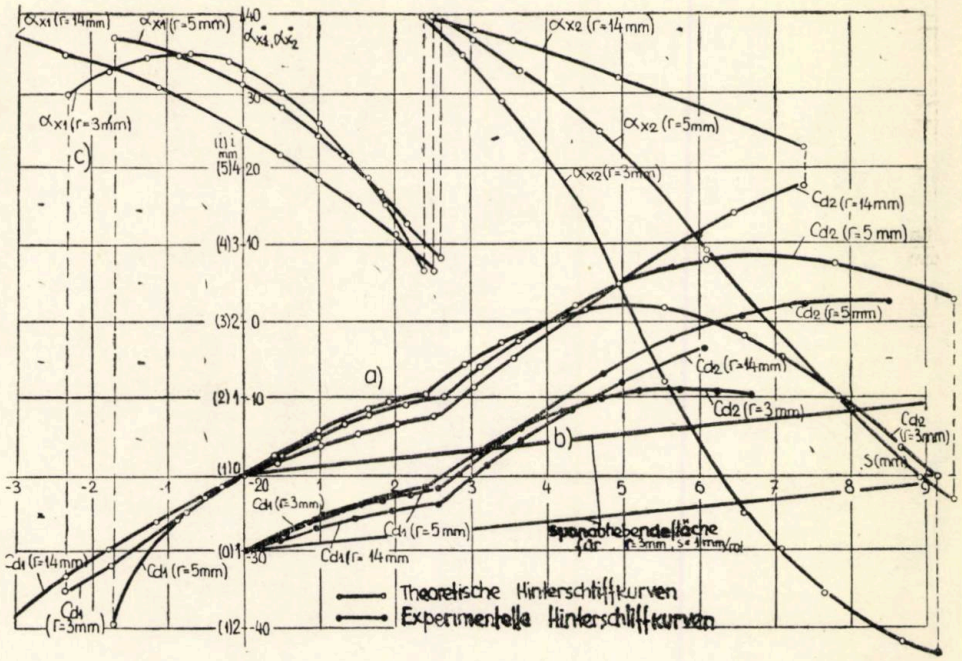



Abb. 2

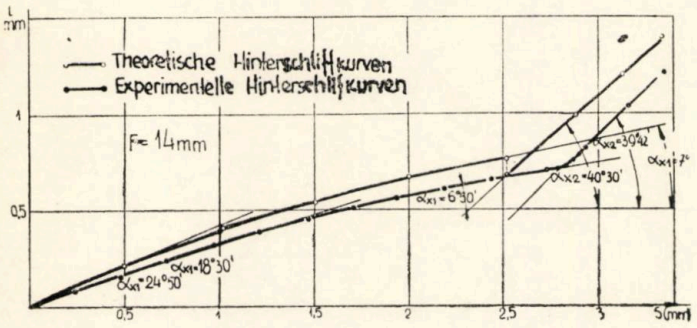



Abb. 3

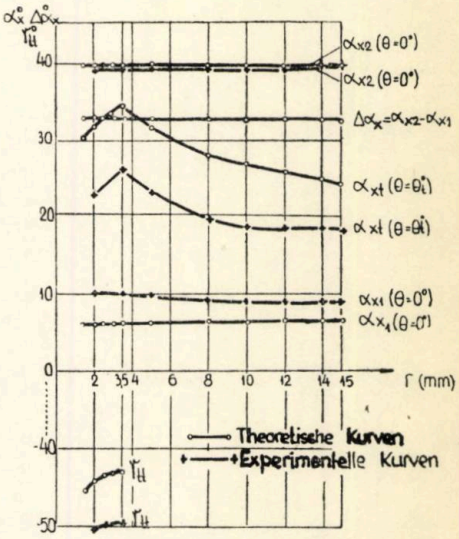
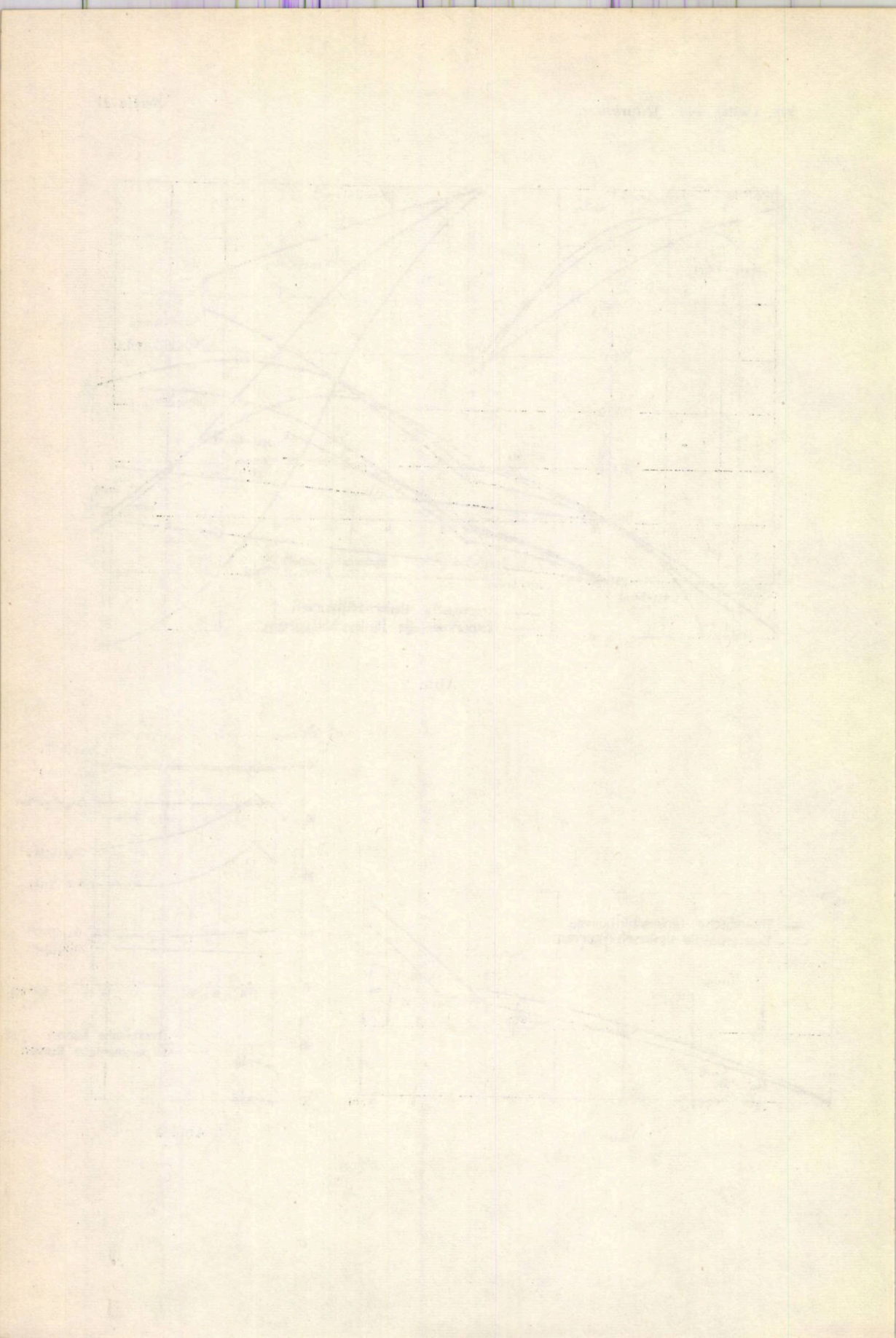



Abb. 4



Ellipsenzylinder; die selben Winkel wurden auch experimentell bestimmt; ihre Änderung ist in Abb. 4 grafisch dargestellt.

Die Komplemente der Spanwinkel an der Querschneide des zweiten Zahnes und danach der Wert des Winkels $\gamma_{tt}$ wurden bestimmt, indem man in Gleichung (9) $\theta = 180° - \psi = 135°50'$ einsetzte und $r$ die Werte zwischen 3,5 und 1,5 annehmen liess.

Stellt man die Ergebnisse der geometrischen, theoretischen und der experimentellen Untersuchungen über die Freiwinkelflächen mit doppeltem Ellipsenzylindermantelanschliff einander gegenüber, so kommt man zu folgenden Schlussfolgerungen:

1. Die theoretisch hergeleitenen Beziehungen sind für die theoretische Untersuchung dieses Verfahrens gültig, die erhaltenen Werte bedürfen einiger geringfügiger Minuskorrekturen.

2. Die theoretisch und experimentell erhaltenen Hinterschliffkurven weisen im Schneidenintervall keine Umkehrpunkte auf, die das Spanen unmöglich machen würden (Abb. 1 *a*, *b*).

3. Die Freiwinkel $\alpha_{x1}$ fallen entlang der Hinterschliffkurven $C_{d1}$ bis auf 6...8° in den Schnittpunkten mit den Hinterschliffkurven $C_{d2}$, während die Freiwinkel $\alpha_{x2}$ im selben Punkt ein Maximum aufweisen; theoretisch und praktisch ist festzustellen, dass die Freiwinkel $\alpha_{x1}$, $\alpha_{x2}$ für den Fall $\varepsilon_0 = 0$ entlang der Schnittlinie der Ellipsenzylinder annähernd konstant sind, daher ist die Differenz $\Delta\alpha$ annähernd konstant, im untersuchten Fall beträgt sie 30...35°; es folgt, dass die in [7] aufgestellten, vereinfachten Beziehungen für nicht ins einzelne gehende Berechnungen beim Entwurf der nach diesem Verfahren arbeitenden Schleifmaschinen sehr zufriedenstellend verwenden können.

4. Die Spanwinkel $\gamma_{tt}$ an der Querschneide fallen gegen die Mitte hin, die Meinsten berechneten Werte sind $-43° \ldots -47°$, die kleinsten gemessenen $-50° \ldots -53°$, im Vergleich zu anderen Schleifverfahren sind diese Werte optimisiert.

5. Der Freiwinkel $\alpha_{xt}$ nimmt entlang der Hauptschneide von aussen zur Mitte um ungefähr 10° zu (Abb. 4) und nimmt entlang der Nebenschneide ab; in Anbetracht des Verlaufs der Hinterschliffkurven genügt diese Zunahme, um das Spanen mit jedem durch die Bohrmaschinen ermöglichten Vorschub zu gestatten, das folgt auch aus Abb. 2 *a*, *b*, in der ersichtlich ist, dass der abgewickelte Querschnitt des Schnittes der Schnittfläche mit einer Zylinder vom Halbmesser $r = 3$ mm bei einem Vorschub $s_{rot} = 1$ mm/U gar keine Tendenz aufweist, die Hinterschliffkurven zu schneiden; eine stärker betonte Zunahme des Freiwinkels entlang der Hauptschneide wird möglich, wenn der Bohrer geneigt eingeklemmt wird, so dass seine Schneide nicht parallel zur Schnittlinie der Ellipsenzylinder ausfällt, sondern in einem bestimmten Winkel $\varepsilon_0$ zu dieser; dazu ist es erforderlich, den Tangentialanschlag der Klemmvorrichtung nach dem Bohrer mit dem kleinsten Durchmesser einzustellen, so dass die bei Bohrern mit grossen Durchmessern auftretenden Winkeleinstellfehler von diesem Standpunkt zu einer Optimisierung der Geometrie der Freiwinkelfläche führen.

*Eingegangen am 1. Januar 1976*

*Technische Hochschule, Jassy,*
*Lehrstuhl für Werkzeugmaschinen*
*und Werkzeuge*

## LITERATURVERZEICHNIS

1. Belous V., *Verfahren zu Erzeugung von doppelten Ellipsenzylindermantelanschliffen an Spiralbohrern.* Dossier OSIM, 64.876.
2. Belous V., Pavel V., GojineţchiN. u. Mitarb., *Schleifmaschine fur Spiralbohrer und Stähle.* Rum. Patent, Nr. 55.209.
3. Рудник С., *Аналитическое исследование геометрии заточки спиральных сверл при наклоном исложении ось образующего конуса.* Из. киевского полит. ин-та, **XXIV**, 102.
4. Dress H., *Die Hinterschliffwinkelgleichung für Spiralbohrer mit Kegelmantelanschliff und hieraus abzuleitende Forderungen für Schleifmaschinen mit grossem Schleifbereich.* Wiss. Zeitschrift der Techn. Hochschule Dresden, 7, 2, 369–388 (1957/1958).
5. Solneţeva T. E., *Eine Untersuchung der modernen Schleifverfahren für Bohrer.* Bul. Constr. de maşini, IDT, 6, 56–65 (1959).
6. Belous V., *Untersuchung und Ausarbeitung des Verfahrens zur Erzeugung von Ellipsenzylindermantelanschliffen an Spiralbohrern.* Inauguraldissertation, Technische Hochschule Jassy, 1965.
7. Belous V., *Untersuchungen über den vielfachen Ellipsenzylinder- und den Hyperbelzylindermantelanschliff von Schneidwerkzeugen.* Mitt. der Tagung über Verfahren und Maschinen zur Kaltbearbeitung, Timişoara, 1970.

## STUDIUL GEOMETRIC TEORETICO-EXPERIMENTAL AL SUPRAFEŢELOR DE AŞEZARE ALE BURGHIELOR ELICOIDALE ASCUŢITE DUPĂ METODA CILINDRO-ELIPTICĂ DUBLĂ

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele studiilor geometrice teoretice şi experimentale asupra formei curbelor de detalonare, a unghiurilor de aşezare şi degajare în zonele caracteristice ale suprafeţei de aşezare a burghielor ascuţite după metoda cilindro-eliptică dublă şi se trag unele concluzii privind calităţile aşchietoare ale burghielor ascuţite după acest procedeu, precum şi posibilităţile optimizării geometriei prin reglajul poziţional unghiular în dispozitivele de prindere.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 621—135

# THE REDEEMING OF WASTE-HEAT BY MEANS OF LOW-PRESSURE-TURBINES

BY

DAN URSESCU, MARCEL GUTMAN and RONALD PEREZ

The redeeming of waste-heat contained in fluids at low temperatures (under 100°C) is conditioned by the existence of some installations capable of working at these temperatures. One of the methods which can be used in the absence of such installations is the low-pressure turbine, capable of transforming this heat into electric energy.

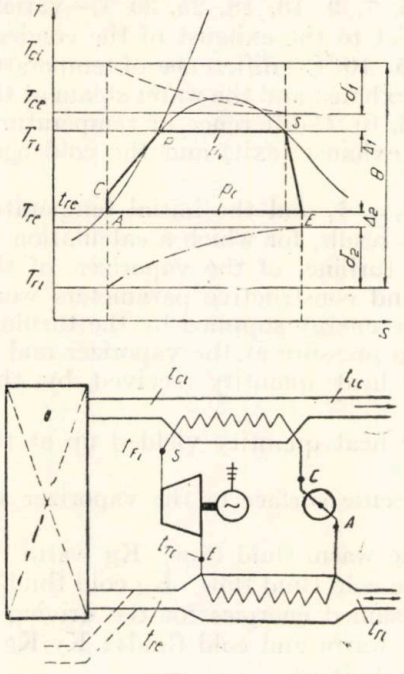



Fig. 1

Fig. 1 shows the general scheme of waste-heat redeeming in industrial units by means of low-pressure turbines. The turbine works in close circuit with steam produced by a surface vaporizer placed on the exhaust duct of

the waste-heat carrier agent. The steam is condensed in a surface condenser fixed on the circuit of a cold technological agent (washing water) or on a cold natural source (river, lake etc.).

Different thermic agents can be used in the turbine (steam, ammonia, izobutane, propane, chlorine ethyl, freon).

The idea of expansion turbine working as seperate unit was used for the first time by Georges C l a u d e more than 40 years ago, in order to generate electric energy out of the heat of warm oceans and it has been recently retaken. In the U.S.S.R. for example, an experimental installation has been built of 680 kW, the warm fluid being water of 81,5° C and the working agent being the freon.

There has been made an economic and thermodynamic study in case the turbine works with water steam, for pointing out the economic advantages offered by the installations of this type.

The thermodynamic study was based on the following parameters:

$\theta = t_{ci} - t_{ri} = 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80,\ °C$—difference of temperatures between the worm and cold fluids, at the vaporizer and condenser inlet.

$\delta_1 = t_{ci} - t_{ce} = 5,\ 7,\ 9,\ 13,\ 18,\ 25,\ 30\ °C$—temperature variation of warm fluid from the inlet to the vaporizer exhaust.

$\delta_2 = t_{ri} - t_{re} = 5,\ 7,\ 9,\ 13,\ 18,\ 25,\ 30\ °C$—variation of temperature of cold fluid from the inlet to the exhaust of the condenser.

$\Delta_1 = t_{ce} - t_{Ti} = 5,\ 10\ °C$—difference of temperature between the warm agent of the vaporizer exhaust and the water steam at the inlet of the turbine.

$\Delta_2 = t_{Te} - t_{re} = 5, 10\ °C$-difference of temperatures between the water steam at the turbine exhaust (exit) and the cold agent at the condenser exhaust.

If we consider $\delta_1 = \delta_2$ and the initial temperature of the cold agent $t_{ri}$=25 °C, 98 variants result, for which a calculation was made, for a preliminary design of the turbine, of the vaporizer, of the condenser and the following functional and constructive parameters were plotted:

$e_T$ — the specific energy supplied by the turbine Ky/Kg water steam;

$p_v$, $p_e$ — working pressure at the vaporizer and condenser;

$q_1$ — the specific heat quantity received by the vaporizer, Ky/Kg water steam;

$q_2$ — the specific heat quantity yielded up at the condenser, Ky/Kg water steam;

$S_c$, $S_r$ — the specific surface of the vaporizer and condenser $m^2$/Kg water steam;

$gfr$ — the specific warm fluid flow, Kg warm fluid/Kg water steam;

$gfr$ — the specific cold fluid flow, Kg cold fluid/Kg water steam;

$e_c$, $e_r$ — the consumed energies for the driving through the vaporizer and condenser, of the warm and cold fluids; Ky/Kg water steam.

There are also admitted:

i) the internal output of the turbine $\eta_i = 0{,}80$;

ii) the outputs of the pumps for the warm and cold fluids, $\eta_h = 0{,}8$;

iii) the circulation speeds of the warm and cold agents, $v$=1,5...2 m/s;

iv) the bore of the vaporizer and condenser pipes, $d_i$ = 14...20 mm.;

The calculations were made for 1 kg steam which develops in the turbine. Bazed on the above figures the benefit corresponding to the supplied electric energy was calculated, $\varepsilon_e$, in thousands lei/year and the cost of the surfaces $\varepsilon_s$ starting from the present prices of electric energy and heat exchanges with pipes of 14...20 mm bore. The results of the economic analyses were transcribed in a series of tables, like that represented in Fig. 2, where

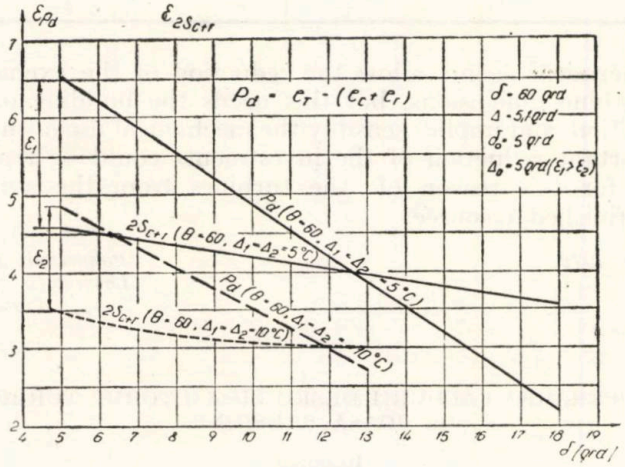



Fig. 2

the variation of $\varepsilon_e$ and $\varepsilon_s$ are given, depending upon the difference of temperature for given values of the difference $\theta$. These tables allow to conclude that at the present prices for electric energy and heat exchange, the amortization is made during the intervals of time given in Table 1.

**Table 1**

| $\theta$ °C | 30 | 40 | 50 | 60 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| Amortization time/year | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |

After the amortization period, the benefits given in Table 2 for every Kg/water steam which develops in the turbine are obtained :

The optimal values for the parameters $_{1,2}$ are those minimal. The performances of the installation and the economic advantages are improved, if we dispose of a cold source with temperatures lower than 25°C.

In this paper we have also studied the posibilities offered by the freon 12 and the ammonia for installations of this kind.

Table 2

| θ | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Benefits thousands lei/year | 1,75 | 3,35 | 5 | 6,5 | 7,75 | 9,5 | 11,3 |

These thermical agents allow the reduction of the exchange surfaces and of the turbine dimensions, but this needs the building of a perfectly closed installation and implies sensibly the mechanical use of the vapourizer.

An important reduction of the investments could be realized by the readaptation for this reason of the turbines from the aviation turboengines with finished resource.

*Received July 19, 1976*

*Polytechnic Institute, Jassy,*
*Laboratory of Turbines and*
*Turboengines*

## RECUPERAREA CĂLDURII DEŞEU CU AJUTORUL TURBINELOR DE JOASĂ PRESIUNE

(Rezumat)

Se analizează aspectele economice ale utilizării turbinelor de joasă presiune cu vapori pentru recuperarea căldurii deşeu conţinută în agenţii termici de temperatură joasă, evacuaţi din instalaţiile industriale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 621.9

# CU PRIVIRE LA UNELE PROBLEME ALE PRECIZIEI POZIȚIONĂRII ȘI ASCUȚIRII BURGHIELOR ELICOIDALE ÎN DISPOZITIVELE DE PRINDERE ALE MAȘINILOR DE TIP ELBITOR

DE

N. GOJINEȚCHI

Ca în orice proces de prelucrare prin așchiere, ascuțirea burghielor elicoidale se realizează cu anumite abateri de la valorile prescrise ale parametrilor geometrici ai feței de așezare, abateri care se datoresc în special erorilor geometrice de poziționare a burghielor în raport cu piatra abrazivă, erori care sînt caracteristice procedeului de ascuțire ELBITOR [1].

Mecanismul apariției erorilor de poziționare (de tip $a$ — deplasări și $\alpha_\theta$ — rotiri [2], [3]) este prezentat în fig. 1.

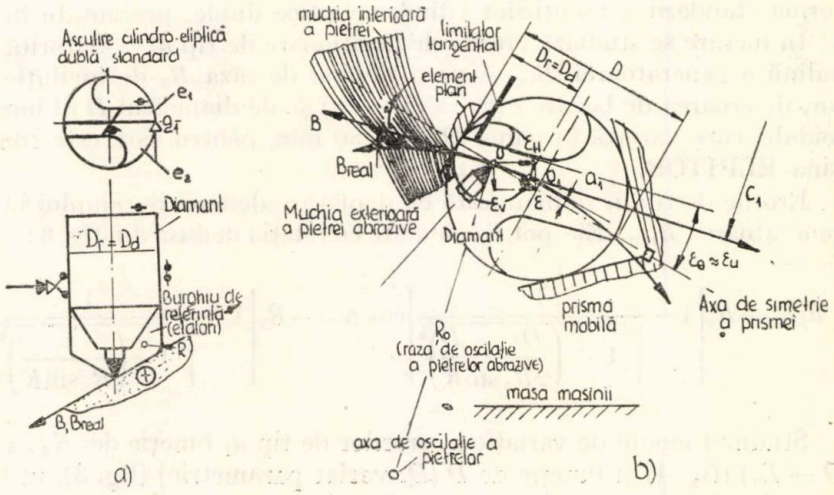



Fig. 1

Generarea suprafeței de așezare a unui dinte (care este formată din suprafețele cilindro-eliptice $e_1$, $e_2$, fig. 1 $a$, intersectate) se face prin deplasarea după direcția $B_{real}$ a unei pietre abrazive, profilată de un diamant,

după o suprafață hiperboloidală de rotație, în raport cu burghiul elicoidal poziționat într-un dispoziziv de prindere, cu ajutorul unui element plan, a unei prisme mobile și a unui limitator tangențial.

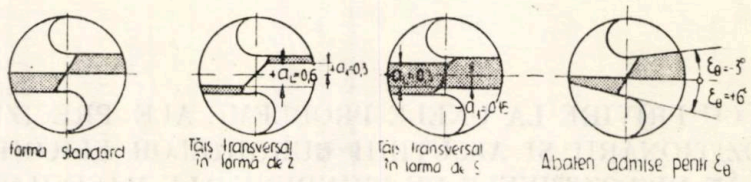



Fig. 2

Datorită caracterului universal al dispozitivului, diametrele $D$ ale burghielor poziționate diferă, de regulă, de diametrul $D_r$ al burghiului de referință sau etalon (după care se face reglarea dispozitivului și a mașinii) și de diametrul $D_d$ al suportului cilindric al diamantului care profilează piatra abrazivă, făcînd posibilă apariția erorilor de bazare $\varepsilon$, care, la rîndul lor, provoacă deplasări de tip $a$ ale axei burghiului poziționat și rotiri de tip $\varepsilon_\theta$, ca urmare a formei curbilinii a generatoarei $B_{real}$ a suprafeței active, hiperboloidale de rotație, a pietrei abrazive fixe a limitatorului tangențial. Erorile de poziționare de tip $a$ și $\varepsilon_\theta$ se mai datoresc, de asemenea, impreciziei de execuție a dispozitivului, uzurii pietrelor, deformațiilor elasto-plastice ale ansamblului burghiu-dispozitiv, ele ducînd în final la apariția abaterilor de la forma standard a ascuțirilor cilindro-eliptice duble, prezentate în fig. 2.

În lucrare se studiază erorile de poziționare de tip $a_1$ — datorită formei curbilinii a generatoarei $B_{real}$ — care depind de raza $R_0$ de oscilație a pietrelor, de eroarea de bazare $\varepsilon$ ($2\varepsilon = D - D_r$) și de diametrul $D$ al burghielor elicoidale, care variază în gama $D = 5...80$ mm, pentru care este construită mașina ELBITOR.

Erorile de tip $a_1$ se manifestă ca deplasări ale axei burghiului în raport cu generatoarea $B_{real}$. Ele pot fi calculate cu relația dedusă din fig. 3 :

$$(1)\quad a_1 = -R_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Dr - D}{2R_0 \sin K}\right)^2}}\right]\cos\beta = -R_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{R_0 \sin K}\right)^2}}\right]\cos\beta.$$

Studiind modul de variație a erorilor de tip $a_1$ funcție de $R_0$, $\varepsilon$ ($2\varepsilon = D - D_r$) (fig. 4) și funcție de $D$ ($D_r$ variat parametric) (fig. 5), în limitele impuse de construcția mașinii, se ajunge la următoarele concluzii privind optimizarea construcției și exploatării mașinii ELBITOR, din punctul de vedere al micșorării erorii $a_1$ : 1) liniarizarea avansului (generatoarei) $B_{real}$, fig. 3, în cadrul unei mașini de ascuțit cu avans hidraulic (soluție radicală) ; 2) utilizarea unui suport de diamant și a unui burghiu de referință cu $D_r =$

$= D_d = 20$ mm ; 3) corectarea acestei erori prin retragerea corespunzătoare a dispozitivului de prindere în raport cu piatra abrazivă, astfel încît să se realizeze curba de erori de tip *4*, fig. 5.

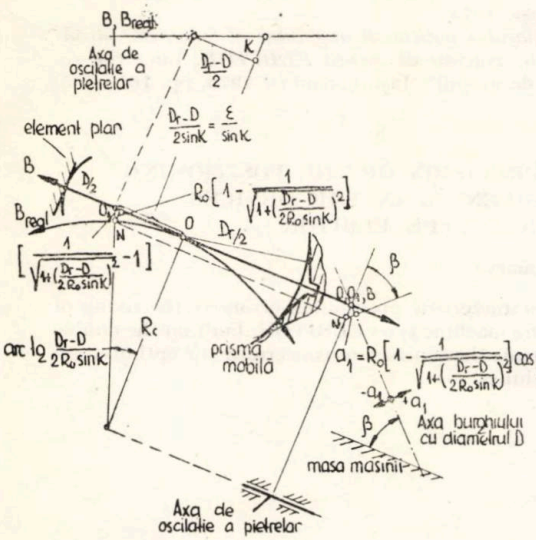



Fig. 3

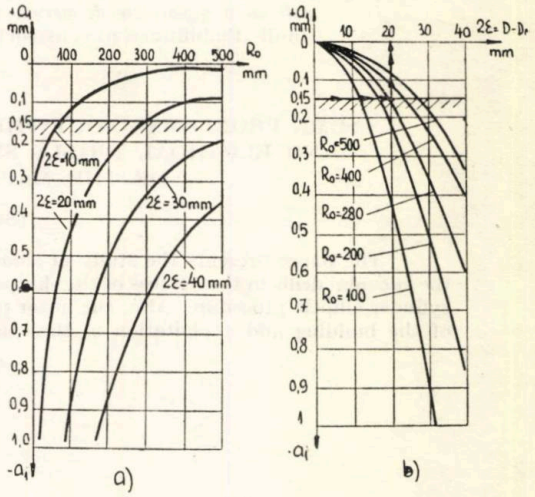



Fig. 4

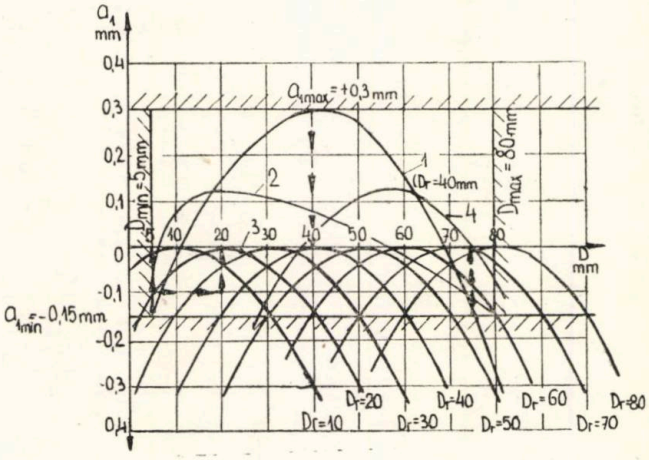



Fig. 5

*Primită la 10 ianuarie 1976*

*Institutul politehnic, Iași,*
*Catedra de mașini unelte și tehnologie*

## BIBLIOGRAFIE

1. Belous V., *Procedeu de ascuțire a sculelor aşchietoare.* Brevet RSR, nr. 55.209.
2. Gojineţchi N., *Contribuții la concepția, proiectarea, construcția și exploatarea dispozitivelor cu elemente de așezare și strîngere prismatice pentru prinderea burghielor elicoidale pe mașinile de ascuțit construite după procedeele cilindro-eliptice duble.* Teză de doctorat, Inst. polit. Iași, 1974.
3. Gojineţchi N., *Unele probleme ale reglajului poziţional unghiular al burghielor elicoidale în dispozitivele de prinderi ale mașinii de ascuțit ELBITOR.* Lucrările sesiunii „Fiabilitatea în construcția de mașini", Iași, noiembrie 1975, pp. 161—165.

## SOME PROBLEMS ABOUT THE PRECISION OF THE POSITIONING AND ELICOIDAL DRILLS SHARPENING IN THE DEVICES OF THE MACHINES TYPE ELBITOR

(Summary)

The paper presents the study of some characteristic positioning errors at the fixing of the elicoidal drills in the devices of the sharpening machine type ELBITOR, built on the double cylinder-elliptic procedure. Also, the autor presents the conclusions concerning the optimisation of the building and exploitation of these machines.

29

1977 MAR 29

40822